atics

APR 1

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 169

Heft 2

Ausgegeben den 28. März 1933

519

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1933

Band 169. Heft 2.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Hensel, Kurt, Über die Ausführbarkeit der elementaren Rechenoperationen in Ringen von Systemen	67
Hurewicz, Witold, Über dimensionserhöhende stetige Abbildungen	71
Strubecker, Karl, Über eine Kreisfigur	79
Ta Li, Neue Beweise zu den Carmichaelschen Sätzen über die Reihe $\Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g(x+n)$	87
Moriya, M., Über die Fermatsche Vermutung	92
Volk, Otto, Über dreifache Flächensysteme, die sich in Geodätischen schneiden	98
Grunwald, Wilhelm, Ein allgemeines Existenztheorem für algebraische Zahlkörper	103
Hesselbach, B., Über die Konstruktion der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung im komplexen Gebiet	108
Walfisz, Arnold, Teilerprobleme. Dritte Abhandlung	111

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgend einem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg-Lahn, Behringweg 7.

Über die Ausführbarkeit der elementaren Rechenoperationen in Ringen von Systemen.

Von *Kurt Hensel* in Marburg a. L.

Ich betrachte im folgenden den Ring $\mathfrak{R}(A, B, C, \ldots)$ aller ganzen Systeme n-ter Ordnung, deren Elemente $a_{ik}, b_{ik}, \ldots$ *ganze* Zahlgrößen eines Körpers $\mathfrak{K}(a, b, \ldots)$ sind, welchen ich in einer früheren Arbeit („Über Systeme in einfachen Körpern", ds. Journ. Bd. 160, S. 131—142) einen *einfachen* Körper genannt habe; dies sind im wesentlichen Körper, deren Elemente $a = \varepsilon p^{\alpha} p'^{\alpha'} \ldots$ sich eindeutig in Primfaktoren und Einheiten zerlegen lassen.

In diesem Ringe ist die Addition Subtraktion und Multiplikation seiner Systeme, nicht aber die Division, unbeschränkt und eindeutig ausführbar. In der folgenden kurzen Betrachtung soll die notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben werden, daß ein Element B durch ein anderes A vorn oder hinten dividiert werden kann, daß also die beiden Gleichungen

$$AX = B \quad \text{bzw.} \quad YA = B.$$

überhaupt eine Lösung

$$X = A\backslash B \quad \text{bzw.} \quad Y = B/A$$

besitzen, und es soll, falls dies der Fall ist, der allgemeinste Wert dieser beiden Quotienten $A\backslash B$ bzw. B/A angegeben werden.

Nur die eine, etwa die erste, von diesen beiden Gleichungen braucht im folgenden untersucht zu werden, da die zweite Gleichung genau ebenso behandelt werden kann; beide Gleichungen führen dann auf dieselbe Teilbarkeitsbedingung. Diese Frage wird nun durch den folgenden allgemeinen Satz vollständig gelöst:

Die Gleichung $AX = B$ besitzt dann und nur dann eine Lösung $X = A\backslash B$ im Ringe $\mathfrak{R}(A, B, C, \ldots)$, wenn die Äquivalenz besteht:

$$(A, B) \sim (A),$$

wenn also der Nenner A durch die Hinzufügung des Zählers B im Sinne der Äquivalenz nicht geändert wird. Genau dasselbe gilt auch für die Gleichung $YA = B$, d. h. für den hinteren Quotienten B/A.

Unsere Gleichung besitzt nämlich dann und nur dann eine Lösung X_0, wenn $B = AX_0$, wenn also B ein ganzes hinteres Vielfaches von A ist; und dies ist, wie jetzt gezeigt werden soll, dann und nur dann der Fall, wenn $(A, B) \sim (A)$ ist.

Ist nämlich zunächst $B = AX_0$, so sind diese beiden als Systeme $2n$-ter Ordnung aufgefaßten Systeme

$$(A, B) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wirklich äquivalent, wie aus den beiden Gleichungen

$$\begin{pmatrix} A & AX_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & X_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AX_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -X_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

unmittelbar hervorgeht.

Um nun zu beweisen, daß auch umgekehrt $B = AX_0$ sein muß, wenn $(A, B) \sim (A)$ ist, zeige ich zuerst, daß, falls diese Äquivalenz für zwei Systeme A, B besteht, sie auch für jedes Paar äquivalenter Systeme

$$\bar{A} = PAQ, \quad \bar{B} = PBQ$$

erfüllt ist, welche aus jenen durch Multiplikation mit zwei beliebigen unimodularen Systemen P und Q hervorgehen, und umgekehrt. Dies folgt nämlich unmittelbar daraus, daß sowohl die Ssyteme A und $\bar{A}$ als auch die Systeme (A, B) und $(\bar{A}, \bar{B})$ zueinander äquivalent sind, wie aus den Gleichungen

$$PAQ = \bar{A}, \qquad P^{-1}\bar{A}Q^{-1} = A$$

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

unmittelbar hervorgeht.

Ich wähle nun, was immer möglich ist, die Multiplikatoren P und Q so, daß

$$\bar{A} = PAQ = (e_i)$$

gleich dem Diagonalsystem der Elementarteiler von A wird, und zeige dann, daß für diese Wahl aus der Äquivalenz $(\bar{A}, \bar{B}) \sim (\bar{A})$ die Gleichung $\bar{B} = \bar{A}\bar{X}_0$ folgt. Dann ergibt sich aber aus ihr sofort die gesuchte Gleichung $B = AX_0$, wenn X_0 durch die Gleichung

$$X_0 = Q\bar{X}_0Q^{-1} \quad \text{oder} \quad \bar{X}_0 = Q^{-1}X_0Q$$

mit $\bar{X}_0$ zusammenhängt; denn dann geht ja die Gleichung $\bar{B} = \bar{A}\bar{X}_0$ über in

$$PBQ = PAQ \cdot Q^{-1}X_0Q = P(AX_0)Q.$$

Um nun den Nachweis zu führen, daß aus der Äquivalenz $(\bar{A}, \bar{B}) \sim (\bar{A})$, d. h. daß aus

$$\begin{pmatrix} e_1 & & & \bar{b}_{11} & \dots & \bar{b}_{1n} \\ & e_2 & & \bar{b}_{21} & \dots & \bar{b}_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & & \\ & & & e_n\ \bar{b}_{n1} & \dots & \bar{b}_{nn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} e_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & e_n \end{pmatrix}$$

wirklich die Gleichung $\bar{B} = \bar{A}\bar{X}_0$, d. h.

$$(\bar{b}_{ik}) = (e_i)(\bar{x}_{ik}^{(0)}) = (e_i\bar{x}_{ik}^{(0)})$$

folgt, mögen nun die Elementarteiler e_i von A alle oder nicht alle von Null verschieden sein, bemerke ich nur folgendes: Die obige Äquivalenz fordert speziell, daß für jedes Element $\bar{b}_{ik}$ von $\bar{B}$ die spezielle Determinante i-ter Ordnung von $(\bar{A}, \bar{B})$:

$$\begin{vmatrix} e_1 & & & \bar{b}_{1k} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & e_{i-1}\ \bar{b}_{i-1\,k} \\ & & & \bar{b}_{ik} \end{vmatrix} = e_1 \cdots e_{i-1}\bar{b}_{ik},$$

durch den i-ten Determinantenteiler $e_1 \cdots e_{i-1}e_i$ von A teilbar, d. h. daß $\bar{b}_{ik} = e_i\bar{x}_{ik}^{(0)}$ sein muß, falls $e_i \neq 0$ ist. Für die Elementarteiler $e_i = 0$ ergibt sich entsprechend sukzessive,

daß die bezüglichen Zeilen von $\overline{B}$ Null sein müssen. Hiermit ist der allgemeine Satz über die Ausführbarkeit der Division im Ringe $R(A, B, C, \ldots)$ vollständig bewiesen.

Betrachtet man allgemeiner den Ring aller ganzen und gebrochenen Systeme n-ter Ordnung und nennt nun B ein ganzes Vielfaches von A, wenn der Quotient $A\backslash B$ bzw. B/A ganz ist, so beweist man genau wie vorher, daß B dann und nur dann ein Multiplum von A ist, wenn $(A, B) \sim A$ ist. Im allgemeinen ist ja das System A ein Multiplum von (A, B) weil

$$A = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Also besteht zwischen den Elementarteilern (e_i) von A und (f_i) von (A, B) stets eine Gleichung

$$(e_i) = (g_i f_i),$$

d. h. die Elementarteiler von A sind stets ganze Vielfache der entsprechenden Elementarteiler von (A, B).

Dann und nur dann, wenn alle diese ganzen Zahlen $g_i = 1$, wenn also alle $e_i = f_i$ sind, besitzt also die Gleichung $AX = B$ eine ganzzahlige Lösung $A\backslash B$.

Es werde jetzt noch untersucht, welches die allgemeinste Lösung der Gleichung $AX = B$ ist, falls diese überhaupt eine Lösung besitzt. Der Einfachheit wegen werde hier nur der für diese Frage allein wesentliche Fall untersucht, daß *alle* Elemente des Bereiches $R(A, B, C, \ldots)$ als ganz angesehen werden, was ja als spezieller Fall in der soeben durchgeführten allgemeinen Untersuchung enthalten ist. Hier ist also die obige Gleichung dann und nur dann auflösbar, wenn die transformierte $\overline{A}\,\overline{X} = \overline{B}$ es ist, wo jetzt

$$\overline{A} = PAQ = 1_r, \qquad \overline{B} = PBQ$$

ist; hier ist 1_r das zu A äquivalente defekte Einheitssystem vom Range $r = [A]$, und P und Q sind zwei geeignet gewählte Einheitsmultiplikatoren n-ter Ordnung.

Schreiben wir jetzt alle hier auftretenden Systeme nach ihrer Zerlegung durch Schnitte hinter der r-ten Zeile und Kolonne als gebildet aus vier Partialsystemen, so geht die Gleichung $\overline{A}\,\overline{X} = \overline{B}$ über in

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{X}_{11} & \overline{X}_{12} \\ \overline{X}_{21} & \overline{X}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{X}_{11} & \overline{X}_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{B}_{11} & \overline{B}_{12} \\ \overline{B}_{21} & \overline{B}_{22} \end{pmatrix},$$

und diese hat dann und nur dann eine Lösung, wenn $\overline{B}_{21} = \overline{B}_{22} = 0$ ist, d. h. wenn, wie oben allgemein gezeigt wurde, $(\overline{A}, \overline{B}) \sim (\overline{A})$ oder $(A, B) \sim (A)$ ist, und ihre allgemeinste Lösung ist dann

$$\begin{aligned} \overline{X} &= \begin{pmatrix} \overline{B}_{11} & \overline{B}_{12} \\ \overline{X}^{(0)}_{21} & \overline{X}^{(0)}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{B}_{11} & \overline{B}_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{X}^{(0)}_{11} & \overline{X}^{(0)}_{12} \\ \overline{X}^{(0)}_{21} & \overline{X}^{(0)}_{22} \end{pmatrix} \\ &= \overline{B} + (1 - 1_r)\,\overline{X}_0 = \overline{B} + (1 - \overline{A})\,\overline{X}_0 = (\overline{B} - \overline{A}\,\overline{X}_0) + \overline{X}_0, \end{aligned}$$

d. h. es besteht für die allgemeine Lösung $\overline{X}$ der Gleichung $\overline{B} - \overline{A}\,\overline{X} = 0$ die Gleichung

$$\overline{X} - \overline{X}_0 = \overline{B} - \overline{A}\,\overline{X}_0,$$

wo $\overline{X}_0 = (\overline{x}^{(0)}_{ik})$ ein ganz beliebiges System n-ter Ordnung bedeutet. Dann hängt aber die vollständige Lösung $\overline{X}$ dieser Gleichung $\overline{B} - \overline{A}\,\overline{X} = 0$ mit der vollständigen Lösung X der vorgelegten Gleichung $B - AX = 0$ durch die Gleichungen zusammen:

$$\overline{A} = PAQ, \quad \overline{B} = PBQ, \quad \overline{X} = Q^{-1}XQ, \quad \overline{X}_0 = Q^{-1}X_0Q,$$

wenn wir unter $X_0 = (x^{(0)}_{ik})$ ebenfalls ein System n-ter Ordnung mit beliebigen Elementen

verstehen. Durch diese Substitutionen ergibt sich aber aus der obigen Gleichung für $\overline{X}$ die folgende Gleichung für X:

$$Q^{-1}(X - X_0)\,Q = P(B - AX_0)\,Q$$

oder

$$X - X_0 = QP\,(B - AX_0).$$

Genau ebenso ergibt sich die allgemeine Lösung $Y = B/A$ der Gleichung $YA = B$ unter derselben Bedingung $(A, B) \sim (A)$ in der Form:

$$Y - Y_0 = (B - Y_0A)\,PQ.$$

Eingegangen 8. August 1932.

Über dimensionserhöhende stetige Abbildungen.

Von *Witold Hurewicz* (Amsterdam).

In dieser Arbeit werden stetige Transformationen topologischer Räume betrachtet, bei denen eine Erhöhung der Dimensionszahl eintritt. Klassisches Beispiel dafür ist die von Peano entdeckte Abbildung des linearen Kontinuums auf die Quadratfläche.

1. X und Y seien topologische (separable und metrisierbare) Räume, bestehend aus Punkten x bzw. y. Es liege eine eindeutige *beiderseits stetige* Abbildung F von X auf Y vor [1]). Wir wollen annehmen, daß für jedes y die *Originalmenge* $F^{-1}(y)$ (d. h. die Menge aller x mit $F(x) = y$) nur aus endlich-vielen Punkten besteht, und bezeichnen die Anzahl dieser Punkte (die „Vielfachheit" von y) mit $\mu(y)$. Der Hauptzweck dieser Arbeit besteht im Nachweis von

Theorem I. *Ist* $\dim Y - \dim X = n > 0$ [2]), *so nimmt* $\mu(y)$ *mindestens* $n + 1$ *verschiedene Werte an* [3]).

Eine Folgerung daraus ist das frühere Resultat von mir, wonach es in Y notwendig Punkte mit mindestens $n + 1$ Urbildern gibt [4]).

Unter gewissen speziellen Voraussetzungen (s. unten) über den Raum X, insbesondere in dem wichtigen Fall, wo X *lokal euklidisch* ist, d. h. zu jedem seiner Punkte eine mit einem euklidischen Zahlenraum homöomorphe Umgebung besitzt, kann die Schranke $n + 1$ des Theorems I sogar auf $n + 2$ heraufgesetzt werden [4a]).

---

[1]) Nach einer vom Verfasser eingeführten Begriffsbildung (vgl. Proc. Ak. Amst. 29, S. 1014) heißt die Abbildung F von X auf Y beiderseits stetig, wenn sie erstens im üblichen Sinne stetig ist (was bekanntlich darauf hinauskommt, daß für jede in Y abgeschlossene Menge A die zugehörige Originalmenge $F^{-1}(A)$ in X abgeschlossen ist), und zweitens für jede in X abgeschlossene Menge B die Bildmenge $F(B)$ in Y abgeschlossen ist. *Ist X kompakt, so fallen die Begriffe der Stetigkeit und der beiderseitigen Stetigkeit zusammen.* Jede eindeutige stetige Abbildung von X ist in diesem Fall beiderseits-stetig.

Eine für das Folgende wichtige Bemerkung: Sei F eine eindeutige beiderseits stetige Abbildung von X auf Y, und sei M eine Teilmenge von X. Beschränken wir den Definitionsbereich der Funktion F auf die Menge M, so bekommen wir eine Abbildung von M — wir wollen diese Abbildung mit F^M bezeichnen —, die natürlich stetig ist, aber, wie aus ganz einfachen Beispielen hervorgeht, keineswegs beiderseits stetig zu sein braucht. Man sieht nun sehr leicht, daß F^M in den folgenden beiden Fällen beiderseits stetig ist: 1. wenn M in X abgeschlossen ist, und 2. wenn $M = F^{-1}(A)$, wo A eine beliebige Teilmenge von Y bedeutet. Durch Kombinierung dieser beiden Fälle bekommt man ferner: Ist A eine beliebige Teilmenge von Y und *ist M in $F^{-1}(A)$ abgeschlossen, so ist die Abbildung F^M beiderseits stetig.*

[2]) Das Symbol „dim X" bedeutet die (mengentheoretische) Dimension von X. Die Zahl n ist entweder eine natürliche Zahl oder $= \infty$; das letztere ist dann der Fall, wenn X endlich-dimensional und Y unendlich-dimensional ist.

[3]) Für den Fall $\dim X = 0$ wurde der Satz bereits in meiner sub [1]) zitierten Arbeit bewiesen.

[4]) Vgl. Proc. Ak. Amst. 30, S. 159.

[4a]) Im allgemeinen (d. h. ohne besondere Annahmen über die Räume X und Y) läßt sich das Theorem I sicher nicht verschärfen, denn jeder n-dimensionale (separable) Raum kann aus einer nulldimensionalen Menge durch eine Abbildung gewonnen werden, bei der nur Vielfachheiten $1, 2, \ldots, n + 1$ auftreten. Für Intervalle Euklidischer Räume und einige andere wichtige Fälle wurde dies von Lebesgue bewiesen (Fund. Math. 2, S. 283), allgemein von mir (Proc. Ak. Amst. 29, S. 1014, vgl. auch Annals of Math. 31, S. 176).

Der Beweis von I stützt sich auf ein neulich von Freudenthal gefundenes Resultat.

2. Für $m = 1, 2, 3, \ldots$ bezeichnen wir mit Y_m die Menge aller y mit $\mu(y) \geqq m$. Demnach ist $Y_1 = Y$, während Y_2 aus allen y besteht, in denen die inverse Abbildung F^{-1} mehrdeutig ist. Nach Freudenthal gilt nun: Ist $\dim Y - \dim X \geqq k > 0$, so ist $\dim Y_k \geqq \dim Y - k + 1$. Wir verwenden hier nur den folgenden Spezialfall dieser Aussage:

(a) Aus $\dim Y > \dim X$ folgt:

1. $$\dim Y_2 \geqq \dim Y - 1$$ [5]).

Unter Benutzung von (a) wollen wir nun die allgemeinere Behauptung beweisen:

(b) *Für jede Zahl m hat die Beziehung*

2. $$\dim Y_m > \dim X$$

zur Folge:

3. $$\dim Y_{m+1} \geqq \dim Y_m - 1$$ [6]).

(Der Spezialfall $m = 1$ ergibt die Behauptung (a).)

Zum Beweis von (b) sei m eine feste Zahl, und setzen wir 2. als erfüllt voraus. Da X separabel ist, gibt es in X ein *abzählbares* Fundamentalsystem σ [7]) aus (nicht-leeren) offenen Mengen G. Unter τ verstehen wir allgemein ein Teilsystem von σ, bestehend aus m Mengen $G_1, G_2, \ldots, G_m$ mit paarweise fremden abgeschlossenen Hüllen:

4. $$\bar{G}_r \cdot \bar{G}_s = 0 \quad (r, s = 1, 2, \ldots, m; r \neq s)$$ [8]).

Wir setzen für jedes derartige System

5. $$A^\tau = F(\bar{G}_1) \cdot F(\bar{G}_2) \cdots F(\bar{G}_m).$$

A^τ ist eine in Y abgeschlossene Menge, denn jedes $F(\bar{G}_i)$ ist abgeschlossen, als Bild der in X abgeschlossenen Menge $\bar{G}_i$ (vgl. [1])). Aus 4. und 5. folgt sofort:

$$A^\tau < Y_m.$$

Andererseits gibt es zu jedem $y < Y_m$ ein System τ, so daß $y < A^\tau$; sind nämlich $x_1, x_2, \ldots, x_m$ m verschiedene Originalpunkte von y, so kann man in σ m Mengen $G_1, G_2, \ldots, G_m$ finden, die diese Punkte bzw. enthalten und der Bedingung 4. genügen. Für das System τ aus diesen m Mengen hat man offenbar $y < A^\tau$. Wir haben somit gezeigt:

6. $$Y_m = \sum_\tau A^\tau$$

(wo die Summation über alle möglichen Systeme τ zu erstrecken ist). Da es offensichtlich nur abzählbar viele τ gibt und die Mengen A^τ, wie soeben bemerkt, durchweg abgeschlossen sind [9]), ist nach dem „Summensatz" der Dimensionstheorie [10]) mindestens einer unter den Summanden in 6. gleichdimensional mit Y_m. Sei etwa

---

[5]) Vgl. Freudenthal, Sitzungsberichte d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1932, V, S. 3. Diese Aussagen gelten unter der Voraussetzung, daß für jedes y die Menge $F^{-1}(y)$ *nulldimensional* ist, sie gelten also sicher, wenn, wie oben vorausgesetzt wurde, die Mengen $F^{-1}(y)$ durchweg *endlich* sind. Ein kurzer Beweis der Behauptung (a) findet sich unten im Anhang.

[6]) Der Satz (b) bleibt gültig, wenn man die oben getroffene Voraussetzung, daß die Originalmengen $F^{-1}(y)$ durchweg endlich sind, durch die allgemeinere Annahme ersetzt, daß für jedes y $F^{-1}(y)$ nulldimensional ist. Vgl. vorige Fußnote.

[7]) Ein System σ von offenen Mengen eines topologischen Raumes heißt ein Fundamentalsystem, wenn jede offene Menge Vereinigung von Mengen aus σ ist.

[8]) Mit $\bar{G}$ wird (für eine beliebige Teilmenge G von X bzw. von Y) die *abgeschlossene Hülle* von G (in X bzw. in Y) bezeichnet.

[9]) Die Formel 6. lehrt also, daß die Menge Y_m ein F_σ ist (d. h. Summe von abzählbar-vielen abgeschlossenen Mengen).

[10]) Der Summensatz der Dimensionstheorie besagt: Ist $M = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots$, wo die M_i durchweg in M abgeschlossene Mengen (oder auch allgemeiner F_σ in M sind), so ist $\dim M = \max(\dim M_i)$.

7. $$\dim A^{\tau^0} = \dim Y_m ,$$

wo $\tau^0 = \{G_1^0, G_2^0 \cdots G_m^0\}$. Setzen wir

8. $$B = \overline{G}_1^0 \cdot F^{-1}(A^{\tau^0}),$$

dann gilt $F(B) = A^{\tau^0}$; denn nach 8. ist $B < F^{-1}(A^{\tau^0})$, also sicher $F(B) < A^{\tau^0}$; anderseits folgt aus 5. $F(\overline{G}_1^0) > A^{\tau^0}$ und daraus nach 8. $F(B) > A^{\tau^0}$. Wegen 8. ist B abgeschlossen in $F^{-1}(A^{\tau^0})$, folglich ist die Abbildung von B auf A^{τ^0} beiderseits stetig (s. den Schluß der Fußnote [1])). Ferner gilt nach 2. und 7. $\dim A^{\tau^0} > \dim X$, also wegen $B < X$ a fortiori $\dim A^{\tau^0} > \dim B$. Für die Abbildung $B \to A^{\tau^0}$ ist somit die Voraussetzung des Satzes (a) erfüllt. Verstehen wir unter Y_2^B die Menge derjenigen y, für die $B \cdot F^{-1}(y)$ aus mindestens zwei Punkten besteht, so haben wir nach (a) $\dim Y_2^B \geqq \dim A^{\tau^0} - 1$, oder nach 7.

9. $$\dim Y_2^B \geqq \dim Y_m - 1 .$$

Ist y ein Punkt von Y_2^B, so sind wegen $Y_2^B < F(B) = A^{\tau^0}$ die Mengen $F^{-1}(y) \cdot \overline{G}_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ nicht leer, außerdem besteht nach der Definition von Y_2^B die Menge $F^{-1}(y) \cdot \overline{G}_1^0$ aus mindestens zwei Punkten; daraus folgt, da die G_i^0 der Bedingung 4. genügen, daß $F^{-1}(y)$ mindestens $m + 1$ verschiedene Punkte enthält, d. h.

10. $$Y_2^B < Y_{m+1} .$$

Aus 9. und 10. folgt unmittelbar die erwünschte Relation 3.

Falls der Raum X *halbkompakt* ist, d. h. Summe von abzählbar-vielen kompakten [10a]) Mengen, behält der Satz (b) seine Gültigkeit, wenn man von der Funktion F statt der beiderseitigen Stetigkeit bloß die *gewöhnliche Stetigkeit* voraussetzt. Nach Annahme ist nämlich

11. $$X = \sum_{i=1}^{\infty} K_i \ (K_i \text{ kompakt}),$$

wobei man ohne weiteres noch annehmen darf [10b]):

12. $$K_i < K_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Vermöge der Funktion F wird K_i stetig, also *beiderseits stetig* (für kompakte Mengen fallen ja die Begriffe der stetigen und der beiderseits stetigen Abbildung zusammen) auf $F(K_i)$ abgebildet. Sei Y_m^i die Menge aller y, für die die Menge $K_i \cdot F^{-1}(y)$ mindestens m Punkte enthält; Y_m^i besteht aus jenen Punkten, die bei der (beiderseits stetigen) Abbildung von K_i auf $F(K_i)$ eine Vielfachheit $\geqq m$ haben, und daraus folgt zunächst, daß Y_m^i ein F_σ in $F(K_i)$ ist (vgl. oben Fußnote [9])); da $F(K_i)$ kompakt [11]) ist, also abgeschlossen in Y, so ist Y_m^i ein F_σ in Y. Weiter hat man:

13. $$Y_m = \sum_{i=1}^{\infty} Y_m^i .$$

Ist nämlich $y < Y_m$, besitzt also y m verschiedene Originalpunkte, etwa $x_1, x_1, \ldots, x_m$, so sind wegen 11. und 12. bei hinreichend großem i diese m Punkte sämtlich in K_i enthalten. Aus 13. folgt nach dem bereits oben verwendeten Summensatz, daß für eine gewisse Nummer i' gilt:

14. $$\dim Y_m^{i'} = \dim Y_m .$$

Nach 2. ist $\dim Y_m^{i'} > \dim X$, also erst recht $\dim Y_m^{i'} > \dim K_{i'}$; die Anwendung des Satzes (b) auf die (beiderseits stetige) Abbildung $F(K_{i'})$ ergibt (unter Bezugnahme auf 14):

$$\dim Y_{m+1}^{i'} \geqq \dim Y_m^{i'} - 1 = \dim Y_m - 1.$$

Wegen $Y_{m+1} > Y_{m+1}^{i'}$ erhält man daraus die Formel 3.

3. Der Beweis des Theorems I erfordert nur noch wenige Worte. Seien

$$m_1 < m_2 < \cdots < m_k$$

[10a]) Den Ausdruck „kompakt" gebrauchen wir immer im Sinne „in sich kompakt".

[10b]) Auf Grund der Tatsache, daß endlich-viele kompakte Mengen eine kompakte Summe ergeben.

[11]) Das stetige Bild einer kompakten Menge ist bekanntlich immer kompakt.

sämtliche Werte, die von $\mu(y)$ angenommen werden. Die Annahme

15. $$k < n + 1 \qquad (n = \dim Y - \dim X)$$

wollen wir zum Widerspruch führen. Nach der Bedeutung der Mengen Y_m ist $Y_m = Y_{m_i}$, wenn $m_{i-1} < m \leqq m_i$. Die Behauptung (b) des vorigen Paragraphen kann also auch so formuliert werden: Aus $\dim Y_{m_i} > \dim X$ folgt $\dim Y_{m_{i+1}} \geqq \dim Y_{m_i} - 1$. Durch wiederholte Anwendung bekommen wir unter Berücksichtigung von 15.:

$$\dim Y_{m_k} \geqq \dim Y - k + 1 > \dim X,$$

und daraus folgt wieder nach (b):

$$\dim Y_{m_k+1} \geqq \dim X \geqq 0.$$

Also ist Y_{m_k+1} nicht leer[11a]), d. h. es gibt Punkte y mit $\mu(y) \geqq m_k + 1$; dies widerspricht aber der Bedeutung der Zahl m_k [12]).

Außer dem Theorem I haben wir noch die Formel bewiesen:

16. $$\dim Y_m \geqq \dim Y - i + 1 \qquad (i \leqq n + 1),$$

welche eine Verschärfung des oben angeführten Freudenthalschen Satzes ist. Der Spezialfall $i = n + 1$ ergibt:

17. $$\dim Y_{m_{n+1}} \geqq \dim X.$$

Von der letzten Formel werden wir im folgenden Gebrauch machen.

Aus den Überlegungen am Schlusse des vorigen Paragraphen folgt unmittelbar: Ist der Raum X halbkompakt, so bleiben das Theorem I und ebenso die Formeln 16. und 17. richtig, wenn man die Funktion F bloß als stetig (nicht notwendig als beiderseits stetig) voraussetzt.

4. Wir wollen nun annehmen, der Raum X genüge der folgenden Bedingung:

(α) Jede in X nirgends-dichte Menge hat eine kleinere Dimension als X. (Andere Formulierung: Jede in X abgeschlossene, mit X gleichdimensionale Menge enthält eine in X offene Menge.)

Dieser Bedingung genügen beispielsweise die euklidischen und allgemeiner die lokal-euklidischen Räume von endlichen Dimensionen. [13])

Unter dieser Voraussetzung kann das Theorem I folgendermaßen verschärft werden:

Theorem II. *Hat der Raum X die Eigenschaft (α) und ist $\dim Y - \dim X = n > 0$, so nimmt $\mu(y)$ mindestens $n + 2$ verschiedene Werte an.*

Beim Beweis können wir uns offenbar auf den Fall eines endlichen n beschränken, da für $n = \infty$ die Theoreme I und II dasselbe aussagen.

Zur Vorbereitung des Beweises bemerken wir vor allem: Man kann, ohne die Allgemeinheit einzuschränken, die folgende Eigenschaft von dem Bildraum Y voraussetzen:

(β) Jede offene Teilmenge von Y hat dieselbe Dimension wie Y.

Ist nämlich diese Bedingung von vornherein nicht erfüllt, so gibt es nach einem bekannten Satz der Dimensionstheorie doch immer eine mit y gleichdimensionale Menge $Y^* < Y$ (die man sogar als in Y abgeschlossen annehmen darf), welche die Eigenschaft (β) besitzt. [14]) Sei dann $X^* = F^{-1}(Y^*)$. Falls $\dim X^* < \dim X$, ist $\dim Y^* - \dim X^* \geqq n + 1$, und es folgt bereits aus dem Theorem I, daß bei der Abbildung von X^* auf Y^*, also auch

---

[11a]) Die leere Menge ist im Sinne der allgemeinen Dimensionstheorie (-1)-dimensional.

[12]) Eine unmittelbare Folgerung aus dem Theorem I ist die Aussage: Ist der Raum X vermöge der Funktion F eindeutig und beiderseits stetig auf Y abgebildet, und gilt für eine Menge $M < Y$ $\dim M - \dim X = n > 0$, so nimmt $\mu(y)$ *auf der Menge* M mindestens $n + 1$ verschiedene Werte an.

[13]) Diese Räume genügen sogar der schärferen Bedingung, daß jede Teilmenge mit überall-dichtem Komplement kleinere Dimension hat als der Gesamtraum. Ein *nulldimensionaler* Raum hat offenbar dann und nur dann die Eigenschaft (α) wenn er keine Häufungspunkte enthält.

[14]) Vgl. Hurewicz, Math. Ann. 96, S. 762, Theorem VI.

bei der Abbildung von X auf Y Punkte von mindestens $n+2$ verschiedenen Vielfachheiten auftreten. Ist aber dim $X^* = \dim X$, so hat offenbar mit X auch X^* die Eigenschaft (α), und wir können beim Beweis von II X bzw. Y durch X^* bzw. Y^* ersetzen, wodurch die simultane Gültigkeit von (α) und (β) erzwungen wird.

Von nun an setzen wir (α) und (β) als erfüllt voraus. *Behauptung*: Für

$$m = \max \mu(y)$$

gilt:

18. $$\dim Y_m < \dim X.$$

Daraus folgt sofort Theorem II; denn bestünde der Wertevorrat von $\mu(y)$ nur aus $n+1$ Werten, so hätten wir in den Bezeichnungen des vorigen Paragraphen $m = m_{n+1}$, und 18. wäre unverträglich mit 17.

Wir haben also bloß 18. zu beweisen. Wir greifen auf die Darstellung 6. für die Menge Y_m zurück. Nach dem Summensatz genügt es, nachzuweisen, daß für beliebiges τ

19. $$\dim A^\tau < \dim X.$$

Sei etwa $\tau = \{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$. Ist y ein Punkt von A^τ, so enthält jede der Mengen $\bar{G}_i$ mindestens einen Originalpunkt von y, also wegen $m = \max \mu(y)$ *genau einen*. Setzen wir also

20. $$B_i = \bar{G}_i \cdot F^{-1}(A^\tau) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

so vermittelt die Funktion F eine *ein-eindeutige* Abbildung zwischen B_i und A^τ, und da diese Abbildung, wie wir bereits im § 2 sahen, beiderseits stetig ist, so sind alle B_i untereinander und mit A^τ homöomorph, und es gilt daher:

21. $$\dim A^\tau = \dim B_i \,(\leqq \dim X) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Für $x < B_i$, $x' < B_j$ schreiben wir $x' = P_{ij}(x)$, wenn $F(x) = F(x')$; dann ist P_{ij} gerade die Funktion, welche die Homöomorphie zwischen B_i und B_j vermittelt. Betrachten wir die Ränder $R_i = B_i \overline{X - B_i}$ der Mengen B_i! R_i ist nirgends dicht in X, es gilt daher nach (α) dim $R_i <$ dim X. Die topologische Abbildung P_{ik} führt R_i in eine in B_k (und somit in X) abgeschlossene Menge von derselben Dimension über. Setzt man also

22. $$R^k = \sum_{i=1}^{m} P_{ik}(R_i) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

so ist nach dem Summensatz dim $R^k <$ dim X.

Wäre nun im Gegensatz zu 19. dim $A^\tau =$ dim X (dim $A^\tau >$ dim X kommt wegen 21. nicht in Frage), so wäre nach 21. dim $B_i =$ dim X, und daher wären die Mengen

23. $$D_k = B_k - R^k (k = 1, 2, \ldots, m)$$

nicht leer. Da nach 22. $R^k > R_k$ gilt, kann man schreiben:

$$D_k = (B_k - R_k) - R^k.$$

In dieser Formel ist $B_k - R_k$ (als die Menge aller inneren Punkte von B_k) offen und R^k abgeschlossen, die Formel lehrt daher, daß die *Mengen D_k offen sind.* Aus 22. folgt leicht $R^k = P_{ik}(R^i)$ und daraus nach 23.:

24. $$D_k = P_{ik}(D_i) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Aus 24. und aus der Bedeutung der Funktionen P_{ij} folgt unmittelbar:

25. $$F(D_1) = F(D_2) = \cdots = F(D_m) \;(= \text{etwa } M),$$

und weil nach der Bedeutung der Zahl m kein Punkt y mehr als m Originalpunkte besitzen kann, ist

$$F^{-1}(M) = \sum_{i=1}^{m} D_i;$$

daraus folgt weiter:

$$26. \qquad F(X - \sum_{i=1}^{m} D_i) = Y - M.$$

Wie oben gezeigt, sind die D_i offene Mengen, also ist $X - \sum_{i=1}^{m} D_i$ abgeschlossen; daher ist nach 26. $Y - M$ als Bild einer abgeschlossenen Menge in Y abgeschlossen, folglich *ist M offen.* Wegen $D_i < B_i < F^{-1}(A^\tau)$ ist nach 25. $M < A^\tau$, also nach 21.

$$\dim M \leqq \dim X < \dim Y.$$

Damit sind wir aber zu einem Widerspruch gelangt, denn nach der Annahme (β) müßte $\dim M = \dim Y$ gelten. Das Theorem II ist somit bewiesen.

Aus I und II folgt leicht: Wird eine *Teilmenge des euklidischen m-dimensionalen Raumes* eindeutig und beiderseits stetig auf eine $(m+n)$-dimensionale Menge abgebildet, so müssen bei dieser Abbildung Punkte von *mindestens $n+2$ verschiedenen Vielfachheiten* auftreten, es sind also, wie schon früher von mir bewiesen wurde, auch Punkte von einer Vielfachheit $n+2$ vorhanden [15]). (Handelt es sich um Abbildungen einer abgeschlossenenen, beschränkten Menge, so kann man natürlich statt „beiderseits stetige, Abbildung" einfacher: „stetige Abbildung" sagen.)

Ähnlich wie beim Theorem I wollen wir noch zeigen: Wird der Raum X als *halbkompakt* vorausgesetzt, so gilt Theorem II schon für *einseitig stetige* Abbildungen. Bemerken wir zunächst, daß aus dem soeben geführten Beweis die folgende Tatsache hervorgeht:

(c) Sei X ein (nicht notwendig halbkompakter) Raum von der Eigenschaft (α). Eine Menge $X' < X$ sei durch die Funktion F beiderseits stetig auf einen Raum Y abgebildet; ist dann bei den früheren Bezeichnungen $m = \max \mu(y)$ (m endlich), und gilt

$$\dim Y_m = \dim X \text{ [16])},$$

so gibt es eine nicht leere Menge $M < Y_m$, so daß erstens $F^{-1}(M)$ offen ist in X, und daß zweitens M mit einer Teilmenge von X homöomorph (also gleichdimensional) ist.

Die oben unter der Annahme $\dim Y_m = \dim X$ hergestellte Menge M leistet nämlich das Verlangte. Daß oben die Funktion F für den vollen Raum X definiert war, während jetzt nur die Abbildung eines Teilraumes X' betrachtet wird, ist für die Konstruktion von M belanglos [16a]).

Sei nun X ein *halbkompakter* Raum von der Eigenschaft (α), und sei F eine eindeutige stetige (nicht notwendig beiderseits stetige) Abbildung von X auf einen Raum Y; X und Y als endlichdimensional vorausgesetzt, sei $\dim Y - \dim X = n > 0$. Es soll gezeigt werden, daß $\mu(y)$ mindestens $n+2$ Werte annimmt. Wir betrachten das System $\mathfrak{A}$ aller Mengen $A < Y$ mit den Eigenschaften: 1. $F^{-1}(A)$ ist offen, 2. $\dim A < \dim Y$. Sei S die Vereinigung aller Mengen aus $\mathfrak{A}$ (also $S = 0$, falls es überhaupt keine nicht-leeren Mengen mit den Eigenschaften 1. und 2. gibt). Wir behaupten: S gehört selbst dem System $\mathfrak{A}$ an (ist also die umfassendste Menge aus $\mathfrak{A}$). Zunächst ist nämlich $F^{-1}(S) = \Sigma F^{-1}(A)$ (wo die Summation über alle A aus $\mathfrak{A}$ zu erstrecken ist), folglich ist $F^{-1}(S)$ offen. Weiter gibt es nach einem bekannten Überdeckungssatz für separable Räume unter den offenen Mengen $F^{-1}(A)$ abzählbar-viele, etwa die Mengen $F^{-1}(A_i)$ ($i = 1, 2, \ldots$), so daß $F(S) = \sum_{i=1}^{\infty} F^{-1}(A_i)$, also $S = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$. Da jedes A_i als stetiges

---

[15]) Vgl. Proc. Ak. Amst. 30, S. 159. Darin ist der klassische Satz von Lebesgue enthalten (vgl. Fund. Math. 2, S. 279), wonach bei stetiger Abbildung einer Strecke auf ein n-dimensionales Intervall Punkte von einer Vielfachheit $\geqq n+1$ auftreten müssen. Für den Fall $n = 2$ wurde dies zuerst von Hahn (Ann. di Math. (3) 21, S. 42) bewiesen.

[16]) Aus dem Satz b) in § 2 folgt, daß jedenfalls $\dim Y_m \leqq \dim X$ gelten muß.

[16a]) Man muß nur die Definition 5. für die Mengen A^τ durch die folgende ersetzen: $A^\tau = \prod_{i=1}^{m} F(\overline{G_i} \cdot X')$!

Bild der in X offenen, also halbkompakten Menge A_i[17]) selbst halbkompakt[18]) und somit ein F_σ in Y ist, folgt aus $\dim A_i < \dim Y$ nach dem Summensatz $\dim S < \dim Y$, also hat S tatsächlich die Eigenschaften 1. und 2. Aus 2. folgt $Y - S \neq 0$; setzen wir $Y' = Y - S$, so ist $F^{-1}(Y') = X - F^{-1}(S)$, also ist $F^{-1}(Y')$ in X abgeschlossen und daher *halbkompakt*. Die Mengen S und Y' sind als stetige Bilder der halbkompakten Mengen $F^{-1}(S)$ bzw. $F^{-1}(Y')$[17]) gleichfalls halbkompakt; nach dem Summensatz ist daher $\dim Y = \max(\dim S, \dim Y')$; wegen $\dim S < \dim Y$ ist also $\dim Y' = \dim Y$. Seien $m_1 < m_2 < \cdots < m_k = m$ alle Werte von $\mu(y)$ und sei Y'_m die Menge aller Punkte von Y', in denen $\mu(y) = m$ (in denen also $\mu(y)$ den größtmöglichen Wert hat). Angenommen nun, der Wertevorrat von $\mu(y)$ bestünde aus $n+1$ Zahlen[19]), dann hätten wir $k = n+1$, und wenn wir auf die Abbildung $F^{-1}(Y') \to Y'$ die Formel 16. anwenden (was nach der Bemerkung am Schluß des § 3 zulässig ist, da $F^{-1}(Y')$ halbkompakt ist), bekommen wir $\dim Y'_m \geqq \dim Y' - n = \dim X$. Der Widerspruch ist also hergestellt, wenn wir zeigen:

27. $$\dim Y'_m < \dim X.$$

Für die halbkompakte Menge $F^{-1}(Y')$ können wir schreiben:

28. $$F^{-1}(Y') = \sum_{i=1}^{\infty} K_i \qquad (K_i \text{ kompakt};\ K_i < K_{i+1};\quad i = 1, 2, \ldots).$$

Sei Y^i_m die Menge sämtlicher y, die in K_i m Originalpunkte haben. Ganz analog wie am Schluß von § 2 zeigen wir, daß die Y^i_m durchweg F_σ sind und daß $Y'_m = \sum_i Y^i_m$. Die Formel 27. ist daher bewiesen, wenn für jedes einzelne i gezeigt wird: $\dim Y^i_m < \dim X$. Angenommen nun $\dim Y^i_m = \dim X$. Bezeichnen wir mit F_i die auf die Menge K_i beschränkte Abbildung F, so ist F_i beiderseits stetig (vgl. Fußnote [1])), und die Anwendung der Behauptung (c) ergibt: es gibt eine nicht leere Menge $M < Y^i_m$, so daß $\dim M \leqq \dim X < \dim Y$ und $F_i^{-1}(M)$ in X offen ist. Aus der Bedeutung der Zahl m geht aber hervor: für $y < Y^i_m$ ist $F^{-1}(y) = F_i^{-1}(y)$, also ist $F^{-1}(M)$ offen; anderseits ist $M < Y^i_m < F(K_i)$, also nach 28. $M < Y'$, d. h. $M \cdot S = 0$. Dies widerspricht aber der Bedeutung der Menge S als Vereinigung aller Mengen A mit offenem $F^{-1}(A)$ und mit $\dim A < \dim Y$. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Ein besonders wichtiger Fall liegt vor, wenn X ein *lokal-euklidischer* (separabler) *Raum* von einer endlichen Dimension ist (worunter auch der Fall einbegriffen ist, daß X ein euklidischer Raum von einer endlichen Dimension ist). Dann ist nämlich sowohl die Bedingung (α) als die Voraussetzung der Halbkompaktheit erfüllt; das Theorem II gilt also auch in diesem Fall für gewöhnliche stetige Abbildungen.

Anhang.

Nachstehend geben wir einen einfachen Beweis für den Freudenthalschen Satz (a), der in dieser Arbeit eine grundlegende Rolle spielte. Zuerst beweisen wir den Hilfssatz[19a]):

Ist bei der beiderseits stetigen Abbildung $Y = F(X)$ für jeden Punkt $y < Y$ $\dim F^{-1}(y) = 0$, so ist $\dim Y \geqq \dim X$. Beweis: Wir betrachten zuerst den Spezialfall $\dim Y = 0$. Wir haben dann zu zeigen, daß X nulldimensional ist, d. h. daß jeder Punkt $x < X$ in beliebig kleinen Mengen enthalten ist, die *offen und gleichzeitig abgeschlossen* sind. Setzt man $y = F(x)$, so gibt es, weil $F^{-1}(y)$ nach Annahme nulldimensional ist, beliebig kleine Umgebungen von x, deren Begrenzungen zu $F^{-1}(y)$ fremd sind. Ist U eine derartige Umgebung von x, $B = \bar{U} - U$ ihre Begrenzung, so gilt $y < Y - F(B)$, und da $F(B)$ im nulldimensionalen Raum Y abgeschlossen, also $Y - F(B)$ offen ist, gibt es eine y enthaltende Menge $V < Y - F(B)$, die (in Y) offen und zugleich abgeschlossen ist. Dasselbe gilt dann (in bezug auf X) von der Originalmenge $F^{-1}(V) < X - B$. Wegen $F^{-1}(V) \cdot B = 0$ ist $F^{-1}(V) \cdot \bar{U} = F^{-1}(V) \cdot U$. Diese Gleichung lehrt, daß die Menge $W = F^{-1}(V) \cdot U$ als Durchschnitt zweier offener bzw. zweier abgeschlossener Mengen

[17]) Es gilt nämlich: jede in einer halbkompakten Menge offene (und ebenso jede in einer halbkompakten Menge abgeschlossene Menge) ist selbst halbkompakt.

[18]) Ein stetiges Bild einer halbkompakten Menge ist nämlich (vgl. Fußnote [11])) wieder halbkompakt.

[19]) Nach dem früher Bewiesenen muß $\mu(y)$ mindestens $n+1$ Werte annehmen.

[19a]) Hinsichtlich kompakter Räume ist der Hilfssatz ein Spezialfall des allgemeinen Satzes, wonach sich die Dimension eines kompakten Raumes bei einer stetigen Abbildung höchstens um m Einheiten erniedrigen kann, falls alle Originalmengen $F^{-1}(y)$ höchstens m-dimensional sind. Vgl. meine unter [1]) zitierte Abhandlung.

offen und zugleich abgeschlossen ist. Da offenbar $x < W < U$ gilt, ist damit die Behauptung für den Fall dim $Y = 0$ bewiesen. Ist allgemein dim $Y = n$ (n endlich), so spalten wir Y in $n + 1$ nulldimensionale Teilmengen $N_1, N_2, \ldots, N_{n+1}$ [20]). Nach dem eben bewiesenen sind die Mengen $F^{-1}(N_i)$ nulldimensional, also ist X Summe von $n + 1$ nulldimensionalen Mengen und daher höchstens n-dimensional [20]).

Zum Beweis von (a) brauchen wir noch die folgende Bemerkung: Ist X ein höchstens n-dimensionaler Raum und $A < X$ eine höchstens $(n-1)$-dimensionale F_σ-Menge, so gibt es eine höchstens nulldimensionale F_σ-Menge $N < X - A$, so daß dim $(X - N) \leqq n - 1$. Zunächst gibt es nämlich eine Zerlegung $X = B + (X - B)$, wo dim $B \leqq n - 1$, dim $(X - B) = 0$ und B ein F_σ ist [21]). Nach dem Summensatz ist $A + B$ als Summe zweier höchstens $(n-1)$-dimensionaler F_σ höchstens $(n-1)$-dimensional. Nach einem bekannten Satz ist $A + B$ in einem G_δ von derselben Dimension enthalten [22]), dessen Komplement offenbar ein F_σ ist und als Teil von $X - B$ die Dimension 0 hat.

Die Behauptung (a), an deren Beweis wir nunmehr herangehen, können wir offenbar in die folgende Gestalt bringen: Aus dim $X \leqq n$, dim $Y_2 < n$ folgt dim $Y \leqq n$ (vorausgesetzt, daß für jeden Punkt $y < Y$ dim $F^{-1}(y) = 0$ gilt). Für $n = 0$ ist dies sicher richtig, denn die Annahme dim $Y_2 < 0$ bedeutet, daß Y_2 leer ist, daß als die Abbildung *topologisch* ist. Sei jetzt $n > 0$, und sei vorausgesetzt, die Behauptung gelte für kleinere Werte von n. Die nach Annahme höchstens $(n-1)$-dimensionale Menge Y_2 ist ein F_σ in Y, folglich ist die Originalmenge $F^{-1}(Y_2)$ ein F_σ in X, ferner ist diese Menge, wie aus dem oben bewiesenen Hilfssatz folgt, höchstens $(n-1)$-dimensional. Wie eben bemerkt, gibt es dann in X eine F_σ-Menge N mit den Eigenschaften:

$$29. \qquad \dim N = 0, \quad \dim (X - N) \leqq n - 1, \quad N < X - F^{-1}(Y_2).$$

Die letzte Relation besagt, daß $F(N)$ ein *topologisches* Bild von N ist; folglich ist $F(N)$ ebenso wie N nulldimensional, und es gilt offenbar $F^{-1}(F(N)) = N$. Sei nun N' eine nulldimensionale (oder leere) Teilmenge von Y_2, so daß dim $(Y_2 - N') \leqq n - 2$. Setzen wir $Y' = Y - (N' + F(N))$, so haben wir:

$$\dim (Y' \cdot Y_2) < n - 1.$$

Ferner gilt wegen $F^{-1}(Y') < X - F^{-1}(F(N)) = X - N$:

$$\dim F^{-1}(Y') \leqq n - 1.$$

Aus den beiden letzten Ungleichungen ergibt sich nach der Induktionsannahme:

$$30. \qquad \dim Y' \leqq n - 1.$$

Setzen wir $M = Y - Y' = N' + F(N)$, so ist wegen $N' < Y_2$ und $F(N) \cdot Y_2 = 0$ (vgl. 29.) $N' = Y_2 \cdot M$. Diese Formel zeigt, daß N' ein F_σ in M ist (denn Y_2 ist ein F_σ in Y). Anderseits ist $F(N)$ als Bild der F_σ-Menge N ein F_σ in Y also erst recht in M. Da die Mengen N' und $F(N)$ beide nulldimensional (oder leer) sind, ergibt sich nach dem Summensatz, daß M nulldimensional (oder leer) ist. Die Formel $Y = Y' + M$ gibt also (unter Berücksichtigung von 30.) eine Zerlegung von Y in einen höchstens $(n-1)$-dimensionalen und einen nulldimensionalen Bestandteil. Folglich ist dim $Y \leqq n$, w.z.b.w.

---

[20]) Bekanntlich kann man jede n-dimensionale Menge in $n + 1$ nulldimensionale Mengen zerlegen (eine dieser Teilmengen kann man dabei als ein G_δ in bezug auf die volle Menge wählen). Umgekehrt, die Summe von $n + 1$ nulldimensionalen Mengen ist höchstens n-dimensional.

[21]) Die Möglichkeit einer derartigen Zerlegung folgt aus der vorangehenden Fußnote.

[22]) Nach einem Satz von Tumarkin (vgl. etwa Menger, Dimensionstheorie, 1929, S. 118) ist jede n-dimensionale Menge in n-dimensionalen G_δ enthalten.

Eingegangen 9. Februar 1932.

Über eine Kreisfigur.

„Herrn Geheimrat St. Jolles zu seinem 75. Geburtstage (25. Juli 1932) gewidmet."

Von *Karl Strubecker* in Wien.

Erst in neuerer Zeit wieder hat W. Blaschke [1]) auf eine seit langem bekannte Figur von 6 Kreisen und 8 Punkten (Fig. 1) hingewiesen und ihre Bedeutung für die Grundlegung der Möbiusschen Kreisgeometrie hervorgehoben. Diese Figur wurde 1838 von A. Miquel [2]), dessen Namen sie auch trägt, angegeben. Sie kann auf verschiedene Arten beschrieben werden. Etwa in diesen beiden Formen:

Satz 1: *Bestimmt man für vier Punkte eines Kreises k eine zyklische Folge und zeichnet durch je zwei benachbarte dieser Punkte einen Kreis, dann liegen die freien Schnittpunkte je zweier benachbarter Kreise auf einem neuen Kreis k'.*

Satz 2: *Hat man drei durch einen Punkt gehende Kreise und wählt auf ihnen je einen weiteren Punkt, dann gehen die drei Kreise, welche je zwei dieser Punkte und den freien Schnittpunkt der sie tragenden Kreise enthalten, durch einen und denselben Punkt.*

Die bisherigen Beweise dieser der Möbiusschen Kreisgeometrie einzugliedernden Sätze sind entweder, wie bei A. Miquel, elementargeometrisch oder benutzen Hilfsmittel der projektiven Geometrie, zum Großteil [3]) aber folgern sie das Bestehen der Konfiguration aus der Tatsache, daß zu sieben Grundpunkten eines Bündels von Flächen zweiter Ordnung stets noch ein achter, assoziierter Grundpunkt existiert.

Wenn ich nun in dieser Note neuerdings auf den Miquelschen Satz eingehe, so geschieht dies erstens deswegen, weil darin die Miquelsche Kreisfigur direkt als eine gewisse Projektion einer räumlichen Figur allereinfachster Art angesehen wird, nämlich als sogenannter „*Netzriß*" *eines Tetraeders.* Die sechs Kanten des Tetraeders ergeben dabei als Bilder die sechs Kreise, seine vier Ecken und vier Ebenen die acht Punkte der Miquelschen Kreisfigur. Es bietet sich so die Möglichkeit, recht mühelos auch viele andere Kreisfiguren herzustellen, womit für diese ein Weg gezeigt ist, den man bei Figuren aus Geraden schon längst und mit bestem Erfolge beschritten hat.

Zweitens aber auch deswegen, weil sich bei einem recht interessanten Spezialfall der Miquelschen Kreisfigur die Gelegenheit ergibt, auf wohl zu erwartende Zusammenhänge zwischen der von Herrn St. Jolles so bedeutend vertieften Geometrie der linearen

---

[1]) W. Blaschke, Eine topologische Kennzeichnung der Kreise auf der Kugel. Abh. Hamb. Math. Sem. **3** (1924), S. 169. Vorlesungen über Differentialgeometrie I, 3. Aufl., Berlin 1930, S. 229.

[2]) A. Miquel, Sur les intersections des cercles et des sphères, Liouville Journ. math. **3** (1838), S. 517. Mémoire de géométrie, ebenda **9** (1844), S. 23.

[3]) E. Study, Über Schnittpunktfiguren ebener algebraischer Kurven, Math. Ann. **36** (1890), S. 217, 225.

E. Müller, Die Kugelgeometrie nach den Prinzipien der Graßmannschen Ausdehnungslehre, Monatsh. Math. Phys. **4** (1893), S. 36.

E. Müller, Vorlesungen über Darstellende Geometrie Bd. II, Die Zyklographie, herausgeg. v. J. L. Krames 1929, S. 197.

J. L. Coolidge, A treatise on the circle and the sphere, Oxford 1916, I § 6, S. 85 ff. Hier findet sich Miquels elementarer Beweis wiedergegeben.

Strahlkongruenzen und der Möbiusschen Kreisgeometrie einzugehen, ein Zusammenhang, der sich noch viel weiter, als dargestellt, verfolgen ließe.

1. Bevor wir nun auf die Kreisfigur selbst eingehen, sind einige Worte über das *Netzrißverfahren* [4]) nötig. Es ist dies eine auf J. Steiner [5]) zurückgehende Abbildung des Raumes, die für die darstellende Geometrie nutzbar gemacht zu haben das Verdienst des jung verstorbenen Wiener Geometers L. Tuschel [6]) ist. Der Name „Netzriß" stammt von E. Müller [7]). Dieses Abbildungsverfahren besteht nun, projektiv allgemein gesagt, in folgendem: gegeben ist als „Abbildungsmittel" — den Ausdruck prägte L. Eckhart [8]) — ein Strahlnetz, d. h. eine lineare Strahlkongruenz, deren Geraden den Inbegriff der Projektionsstrahlen bilden sollen, und eine Bildebene π. Jedem Raumpunkte P^* soll dann in π als Bild der Spurpunkt P des P^* enthaltenden Netzstrahles zugeordnet sein. Ebenso wird sich jede Ebene ε^* auf einen Punkt ε, den Spurpunkt des in ihr liegenden Netzstrahles abbilden lassen. Natürlich ist diese Abbildung im allgemeinen nur in einem Sinne — vom Raum zum Bild — eindeutig, im umgekehrten Sinne aber unendlich-vieldeutig, was aber für unsere Zwecke durchaus nicht störend sein wird, sondern uns bei der räumlichen Deutung einer Bildfigur einen willkommenen Spielraum eröffnet. Ersichtlich gilt

Satz 3. *Die ∞^1 Raumfiguren, die auseinander durch die eingliedrige Gruppe der windschiefen (gescharten) Kollineationen mit den Leitgeraden des Netzes als Achsen hervorgehen, haben ein und dasselbe Netzbild.*

Speziell beim Tuschelschen Netzrißverfahren ist nun die projizierende lineare Kongruenz ein sogenanntes Drehnetz, d. h. ein solches, dessen Leitgeraden (Brennlinien) $g, \bar{g}$ konjugiert komplexe Minimalgeraden zweiter Art sind, etwa von den Gleichungen

$$g\begin{cases} y - ix = 0 \\ z - i = 0 \end{cases} \qquad \bar{g}\begin{cases} y + ix = 0 \\ z + i = 0 \end{cases},$$

während die Bildebene π als Mittelebene $z = 0$ des Drehnetzes gewählt wird.

Die projektiv abgeschlossene Mannigfaltigkeit der Strahlen des Drehnetzes zeigt auch in anschaulicher Weise, wie man am besten die Menge der eigentlichen Bildpunkte zu einem im Sinne E. Studys natürlichen Kontinuum abzuschließen hat: durch die Minimalgeraden der Bildebene als „akzessorische Punkte" und durch die uneigentliche Gerade als „singulären akzessorischen Punkt". *Die Bildebene wird dadurch zur konformen Ebene.* Tatsächlich hat zuerst Herr H. Beck [9]) in dieser naturgemäßen Weise die konforme Ebene abgeschlossen.

---

[4]) Eine vollständige Darstellung dieser Projektionsart findet sich in dem Büchlein von L. Eckhart, Konstruktive Abbildungsverfahren, Wien 1926, S. 42 ff.

Vgl. auch E. Kruppa, Über die Misessche Abbildung räumlicher Kräftesysteme, Z. ang. Math. Mech. **4** (1924), S. 146—155.

E. Kruppa, Über neuere Fortschritte der darstellenden Geometrie, Z. ang. Math. Mech. **4** (1924), S. 411—431.

L. Eckhart, Eine Abbildung der linearen Strahlkomplexe auf die Ebene, Sitzber. Akad. Wien II a; **127** (1918), S. 91—118.

[5]) J. Steiner, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander, Berlin 1839, Nr. 59 = Ges. Werke I, S. 409.

[6]) L. Tuschel, Über eine Schraubliniengeometrie und ihre konstruktive Verwertung, Sitz. Ber. Akad. Wien, II a, **120** (1911), S. 233 ff.

[7]) E. Müller, Über Punkttransformationen, die die Ebenen des Raumes in kongruente gerade Konoide mit parallelen Achsen überführen, Sitz. Ber. Akad. Wien II a, **126** (1917), S. 915.

[8]) L. Eckhart, Über die Abbildungsmethoden der darstellenden Geometrie, Sitzber. Akad. Wien II a, **132** (1923), S. 177.

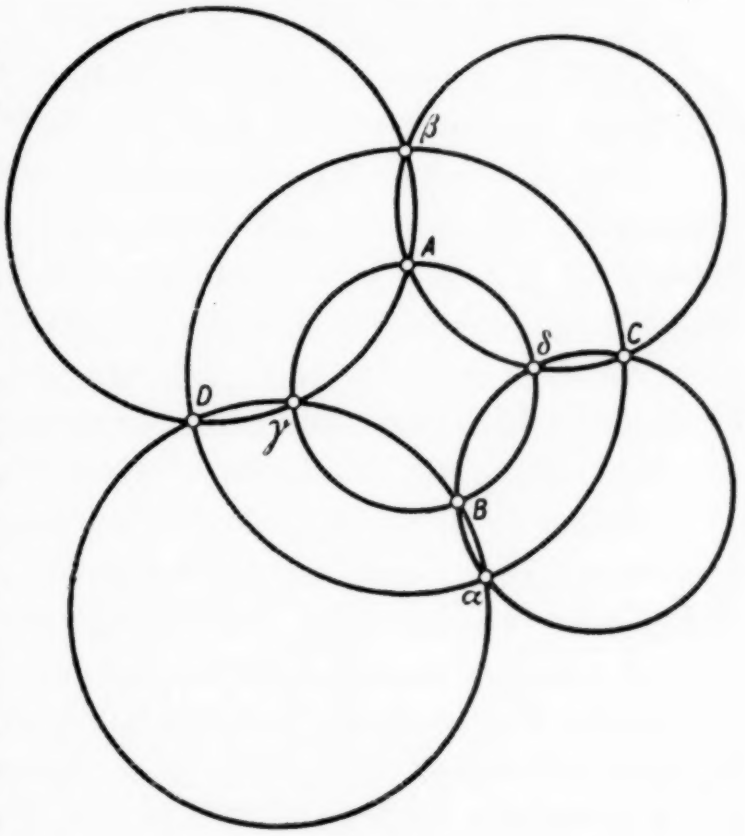
[9]) H. Beck, Konforme Geometrie im Raume, Tôhoku Math. Journ. **24** (1925), S. 217.

Beim Netzrißverfahren sind die Bilder von Raumgeraden, ob man diese nun als Punktreihen oder als Ebenenbüschel auffassen mag, ersichtlich Kreise. Die eine Gerade treffenden Netzstrahlen bilden nämlich eine Regelschar zweiter Ordnung, deren Spurkurve auf π ein Kreis ist, der unter Umständen, wenn die Raumgerade nämlich den uneigentlichen, in π liegenden Netzstrahl trifft, zur Geraden wird, d. h. durch den singulären akzessorischen („unendlichfernen") Punkt geht. Neben der gegebenen Geraden werden alle Leitgeraden der Regelschar, und nur diese, denselben Kreis als Bild besitzen.

Ein Strahlbündel oder ein ebenes Strahlfeld hat als Netzriß ein parabolisches Kreisbündel, nämlich die Gesamtheit der Kreise durch den Bildspurpunkt jenes Netzstrahles, der durch den Bündelscheitel geht oder in der Feldebene liegt.

Das Netzbild eines Strahlbüschels ist daher ein eventuell parabolischer Kreisbüschel.

2. Nehmen wir nun in der konformen Bildebene, (die wir uns als Mittelebene eines willkürlichen Drehnetzes zu denken haben), eine beliebige Miquelsche Kreisfigur her, etwa nach der Beschreibung aus Satz 1 (Fig. 1). Der Kreis k ist dann Netzbild einer Regelschar zweiter Ordnung φ von Raumgeraden. Wählen wir aus diesen eine bestimmte, k^* aus. Es seien dann (A, γ, B, δ) die bereits zyklisch geordneten vier Punkte des Kreises k. Durch sie gehen vier Netzstrahlen, welche, da sie der Leitschar von φ angehören, k^* schneiden, daher als Netzbilder von zwei Punkten A^*, B^* von k^* und von zwei Ebenen γ^* δ^* durch k^* aufgefaßt werden können. Die Kreise z. B. durch A und γ sind nun die Netzrisse der Geraden des Büschels in γ^* mit A^* als Scheitel. Die vier in Satz 1 gewählten Kreise sind also die Netzrisse von vier Seiten eines windschiefen Vierseites mit der einen Diagonale k^*, von dem A^* und B^* zwei auf k^* liegende Ecken, γ^* und δ^* zwei durch k^* gehende Ebenen sind. Dieses windschiefe Vierseit besitzt nun neben k^* noch eine zweite Diagonale k'^*, welche es zu einem Tetraeder ergänzen, dessen fehlende Ecken und Flächen C^*, D^*, α^*, β^* mit k'^* inzident sind. Deren Netzbilder sind aber gerade die freien Schnittpunkte der Kreise $(A\delta)\cdot(B\delta) = C$, $(A\gamma)\cdot(B\gamma) = D$, $(\delta B)\cdot(\gamma B) = \alpha$, $(\delta A)\cdot(\gamma A) = \beta$. Diese vier Punkte liegen daher, da sie Netzbilder von zwei Punkten und zwei Ebenen der Diagonale k'^* sind, tatsächlich auf einem Kreise k', dem Netzrisse von k'^*. Damit ist Satz 1 nachgewiesen und es folgt



Figur 1.

Satz 4: *Jede Miquelsche Kreisfigur kann angesehen werden als Netzriß irgend eines von ∞^1 Tetraedern, welche auseinander hervorgehen durch die eingliedrige Gruppe der windschiefen Kollineationen mit den Leitgeraden des projizierenden Drehnetzes als Achsen.*

Ebenso leicht und anschaulich ist der Beweis des Satzes 2: Die drei durch einen Punkt gehenden Kreise (Fig. 1) können nämlich aufgefaßt werden als die Netzbilder von drei Geraden durch einen Raumpunkt (und von ∞^1 gleichartigen, dazu windschiefkollinearen Tripeln). Die Wahl von je einem Punkte auf diesen Kreisen bedeutet dann

im Raum die Annahme von je einem Punkte auf den drei Geraden, wodurch man wieder die vier Ecken eines Tetraeders erhält. Die im Satze konstruierten Kreise sind dann die Netzbilder der drei noch fehlenden Tetraederkanten und, da diese in einer Ebene liegen, müssen die drei Kreise tatsächlich durch einen Punkt hindurchgehen.

Eine naheliegende Spezialisierung der Miquelschen Figur ist jene, wo etwa δ als singulärer akzessorischer (unendlich ferner) Punkt gewählt wird, das Tetraeder also, als dessen Netzriß sich die Figur dann in besonders anschaulicher Weise auffassen läßt, mit der Seitenfläche δ^* auf der Bildebene aufruht. Dann folgt der ebenfalls auf A. Miquel [1]) zurückgehende, aber auch bei A. F. Möbius [10]) zu findende

Satz 5: *Wählt man auf den Seiten* $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ *eines Dreieckes je einen Punkt* γ, α, β, *dann gehen die drei Kreise* $(A\beta\gamma)$, $(B\gamma\alpha)$, $(C\alpha\beta)$ *durch einen Punkt* D.

3. Von ganz besonderem Interesse ist aber nun der folgende

Satz 6: *Liegen in einer Miquelschen Kreisfigur* (Fig. 2) *die Punkte* A, B, C, D *auf einem Kreise, dann stets auch die Punkte* α, β, γ, δ *und umgekehrt.*

Dies läßt sich in der Ebene leicht aus dem Miquelschen Satze selbst ableiten. Denn betrachten wir (Fig. 2) den Kreis, dem A, B, C, D nach Annahme angehören sollen, dann sind $\gamma, \delta, \alpha, \beta$ Schnittpunkte von Kreisen durch benachbarte Paare der erstgenannten zyklisch geordneten Punkte, liegen also nach Satz 1 wirklich auf einem Kreise.

Aber auch räumliche Überlegungen beweisen den Satz, der auf eine Figur (8, 8) von acht Kreisen und acht Punkten führt, recht einfach. Er ist nämlich eine Folge des bekannten, auf M. Chasles [11]) zurückgehenden

Satzes 7: *Haben die vier Verbindungsgeraden entsprechender Ecken zweier Tetraeder hyperbolische Lage, dann gilt dasselbe von den Schnittgeraden entsprechender* (*obigen Ecken gegenüberliegenden*) *Tetraederebenen und umgekehrt.*

Betrachten wir nun zwei verschiedene, windschief-kollineare Tetraeder, die dieselbe Miquelsche Kreisfigur als Netzbild haben (Satz 4). Es liegen dann die zum selben Bilde führenden Eckenpaare auf je einem Netzstrahl und auch analoge Ebenenpaare gehen durch denselben Netzstrahl. Wenn nun die Punkte A, B, C, D auf einem Kreise liegen, dann haben die Netzstrahlen durch die Tetraederecken hyperbolische Lage, also nach dem Chaslesschen Satze auch die Schnittgeraden der Tetraederflächen, d. h. aber, auch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ liegen auf einem Kreise. Und auch die Umkehrung ist richtig.

Notieren wir noch, den damit ebenfalls bewiesenen, unten noch zu ergänzenden

Satz 8: *Im Raume sei ein Strahlnetz und ein Tetraeder gegeben. Haben dann die vier Netzstrahlen durch die Tetraederecken hyperbolische Lage, dann stets auch die vier Netzstrahlen in den Tetraederflächen und umgekehrt.*

Nehmen wir also als Spezialfall zu Satz 5 und 6 an, die Punkte α, β, γ lägen in gerader Linie, d. h. mit dem singulären akzessorischen (unendlichfernen) Punkte δ auf einem Kreise, dann müssen auch die vier Punkte A, B, C, D auf einem Kreise liegen und umgekehrt. *Die Umkreise der in einem Vierseite vorkommenden vier Dreiecke gehen also*

---

[10]) A. F. Möbius, Lehrbuch der Statik, Leipzig 1837, I, § 117. = Ges. Werke **3**, S. 174.

[11]) M. Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, Bruxelles 1837, in den „additions" zu § 28 des 2. Kapitels. (Ohne Beweis.). Vgl. die deutsche Übersetzung von L. A. Sohnke Halle 1839, S. 648, oder die 2. Aufl., Paris 1875, S. 547. Beweise geben: Th. Weddle, On the theorems in space analogous to those of Pascal and Brianchon in a plane, Cambridge Math. Journ. (2) **6** (1851), S. 118, und O. Hermes, Über homologe Tetraeder, Crelles Journal **56** (1859), S. 222. Vgl. auch A. Cayley, Quarterly Journ. **1**, S. 10. F. Schur, Über besondere Lagen zweier Tetraeder, Math. Ann. **19** (1881), S. 429—432.

durch einen Punkt, eine recht bekannte und vielverwendete, von J. Steiner [12]) gefundene Tatsache, die sich hier als eine entlegene Folge des Chaslesschen Satzes ergeben hat.

4. Die durch den Satz 6 gekennzeichneten speziellen Miquelschen Kreisfiguren von acht Kreisen und acht Punkten haben aber noch eine tiefer liegende Eigenschaft, zu deren Ableitung es einiger Vorbemerkungen bedarf, die auch für sich Interesse verdienen und zu den angekündigten Beziehungen zwischen der von Herrn St. Jolles aufgestellten weittragenden Theorie der linearen Kongruenzen und der Möbiusschen Kreisgeometrie (Inversionsgeometrie) führen.

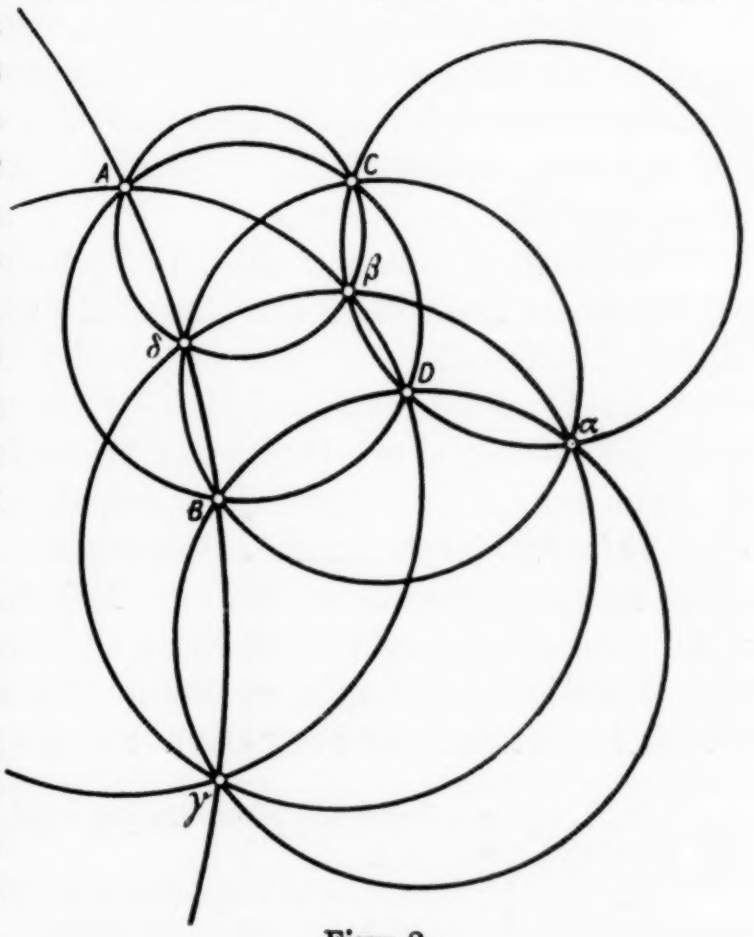
Zunächst gilt, wie wohl zuerst Chr. v. Staudt [13]) erkannt hat,

Satz 9: *Ein Tetraeder* $(ABCD, \alpha\beta\gamma\delta)$ *und ein Geradenpaar* $(g, \bar{g})$ *sind stets dann und nur dann Poltetraeder und polare Geraden eines Polarsystems, wenn die durch die Tetraederecken laufenden Transversalen des Geradenpaares hyperbolische Lage haben.*

Es sind dann nämlich der Punktwurf $g(\alpha\beta\gamma\delta)$ und der Ebenenwurf $g(ABCD)$ nach einem berühmten v. Staudtschen Satze [14]) sowohl zueinander projektiv als auch zum Wurf $\bar{g}(ABCD)$ der Polarebenen der vier Punkte auf g; also werden die Tetraederecken aus g und $\bar{g}$ durch projektive Ebenenquadrupel projiziert, deren Erzeugnis, die genannten Transversalen nach g und $\bar{g}$ also tatsächlich hyperbolische Lage haben.

Diese Lage ist aber, wie v. Staudt [15]) zeigt, für ein Poltetraeder und Polarenpaar auch hinreichend. Denn bezeichnen wir die Spurpunkte von g auf $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit A_1, B_1, C_1, D_1, dann ist die Punktreihe $g(A_1 B_1 C_1 D_1)$ sowohl projektiv zum Ebenenbüschel $g(ABCD)$ als auch zum Büschel $\bar{g}(ABCD)$. Man kann daher einem weiteren Punkte, E_1, auf g eine Ebene $\varepsilon = [\bar{g}E]$ durch $\bar{g}$ so zuordnen, daß $g(A_1 B_1 C_1 D_1 E_1)$ projektiv ist zu $\bar{g}(ABCDE)$, wodurch, wenn man $(ABCD)$ als Poltetraeder und (E_1, ε) als Pol und Polarebene erklärt, ein Polarsystem bestimmt ist. In diesem entspricht aber der Geraden g eine Gerade g' in ε, die von $\bar{g}$ nicht verschieden sein kann. Denn sonst würden die wegen $[g'E] \equiv [\bar{g}E]$ perspektiven Ebenenbüschel $g'(ABCDE)$ und $\bar{g}(ABCDE)$ ein ebenes Strahlbüschel erzeugen, das durch A, B, C, D gehen sollte, was nicht möglich ist. In diesem Polarsystem sind daher g und $\bar{g}$ tatsächlich Polargeraden.

Es ist dann klar, daß mit diesen Transversalen durch die Tetraederecken auch ihre Polargeraden, die Transversalen in den Tetraederflächen gleichfalls hyperbolische Lage haben und daß beide Strahlenquadrupel das gleiche Doppelverhältnis haben, womit Satz 8 aufs neue bewiesen und noch ergänzt ist.



Figur 2.

---

[12]) J. Steiner, Théorème sur le quadrilatère complet, Gerg. Ann. **18** (1827—28), S. 302—303 = Ges. Werke **1**, S. 223—224.

[13]) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, 3. Heft, Nürnberg 1860, S. 22—23, § 38, § 39. Vgl. Th. Reye, Die Geometrie der Lage II, 4. Aufl. 1907, S. 272.

[14]) v. Staudt, a. a. O. § 35, S. 21.

[15]) v. Staudt, a. a. O. § 39, S. 23.

Nun besitzt aber eine Kreisfigur (8, 8) der in Satz 6 geschilderten speziellen Art (Fig. 2) ein räumliches Bildtetraeder (ja sogar ∞^1 windschief-kollineare), die, wie gezeigt wurde, zum Paar der Leitgeraden $(g, \bar{g})$ des projizierenden Drehnetzes die nach Satz 9 für Poltetraeder und Polarenpaare charakteristische Lage haben. Es wird also zu jedem solchen Tetraeder eine Fläche zweiter Ordnung als Inzidenzfläche eines Polarsystems geben, welche die Leitgeraden $g, \bar{g}$ des projizierenden Netzes als Polarenpaar und das Tetraeder zum Poltetraeder hat, und alle diese Flächen zweiter Ordnung gehen — so wie die ∞^1 Tetraeder — auseinander hervor durch die eingliedrige Gruppe der zum Drehnetze gehörigen windschiefen Kollineationen. Sie besitzen also ein aus zwei reellen und zwei konjugiert komplexen Netzstrahlen bestehendes windschiefes Erzeugendenvierseit gemeinsam, dessen Diagonalen g und $\bar{g}$ sind.

Die Raumfigur, deren Netzriß unsere spezielle Kreisfigur darstellt, geht also durch Polarisation an den genannten Flächen zweiter Ordnung in sich über. Die Kreisfigur selbst wird daher durch eine gewisse (involutorische) Verwandtschaft in sich übergehen, die durch sie schon bestimmt ist und welcher wir uns jetzt zuwenden.

5. Im elliptischen Drehnetze bedeutet die Polarisation an den Flächen zweiter Ordnung des genannten Büschels, (dessen Grundkurve ein windschiefes Vierseit aus Netzstrahlen ist), für die Strahlen des Netzes eine gewisse projektive Vertauschung, die obendrein involutorisch ist. Nun ist aber das Netzbild einer der ∞^6 automorphen Projektivitäten des projizierenden Drehnetzes offenbar eine im konformen Kontinuum eineindeutige Punktverwandtschaft, bei der Kreise — als Bilder im Netze enthaltener Regelscharen — wieder in Kreise übergehen, also eine *Möbiussche Kreisverwandtschaft.*

Im Netze gibt es zwei Scharen von Strahlbüscheln, deren Ebenen und Scheitel nämlich mit den beiden Brenngeraden inzidieren. Jenachdem nun die automorphe Projektivität diese Scharen in sich überführt oder untereinander vertauscht, ist die ihr als Netzbild entsprechende Möbiussche Kreisverwandtschaft eine eigentliche oder uneigentliche.

Betrachten wir nun die involutorischen automorphen projektiven Transformationen des Drehnetzes und ihre Bilder: Deren gibt es, wenn man von der Identität absieht, zweierlei:

Erstens die ∞^3 Polaritäten an den einscharig im Drehnetze enthaltenen Flächen zweiter Ordnung, die, wie wir mit Herrn St. Jolles sagen wollen, dem man die tiefste Untersuchung aller Fragen der Geometrie der Strahlnetze verdankt[16]), im Drehnetze die „*primär*" *involutorischen Paarungen der Netzstrahlen* hervorrufen. Ihre Netzbilder sind uneigentliche involutorische Möbiussche Kreisverwandtschaften mit punktweise festem reellen oder nullteiligen Kreis, also *gewöhnliche Inversionen, Spiegelungen an Kreisen.*

Zweitens noch gibt es, und das ist der Fall, der uns interessieren wird, als involutorische automorphe Projektivitäten des Drehnetzes Polaritäten an Flächen zweiter

---

[16]) St. Jolles, Primäre und sekundäre polare Räume einer linearen Strahlenkongruenz, Journ. f. reine u. ang. Math. **134** (1908), S. 1.

St. Jolles, Die windschief involutorischen Paarungen in einer linearen Strahlenkongruenz und die beiden Arten windschief involutorischer linearer Strahlenkongruenzen, Math. Zeitschr. **18** (1922), S. 223—262.

St. Jolles, Die durch eine polare Korrelation in sich selbst überführbaren Regelflächen zweiter Ordnung, Math. Zeitschr. **26** (1927), S. 177—185.

St. Jolles, Die Involutionen auf einer linearen Strahlenkongruenz, Math. Zeitschr. **27** (1927), S. 427—452.

St. Jolles, Die Polarität als Grundlage in der Geometrie der linearen Strahlenkongruenzen, Math. Zeitschr. **33** (1931), S. 733—790.

St. Jolles, Die Metrik im polaren F^2-Gebüsche einer linearen Strahlenkongruenz, Math. Zeitschr. **36** (1932) S. 35—98.

Ordnung, die mit dem Netze nur ein Erzeugendenvierseit gemein haben, für die also g und $\bar{g}$ Polargeraden und Diagonalen dieses Vierseites sind. Jede der ∞^1 Flächen zweiter Ordnung durch dieses Vierseit ruft dabei dieselbe Paarung der Netzstrahlen hervor. Es sind das Herrn Jolles ∞^4 *„sekundäre" Involutionen des Strahlnetzes.* Ihre Netzrisse sind die eigentlichen involutorischen Möbiusschen Kreisverwandtschaften, von Möbius[17]) selbst *„Involutionen in der Ebene"* genannt, welchen Namen man wohl beibehalten soll. Bei ihnen bleibt also — vom gemeinsamen Erzeugendenvierseit herstammend — nur ein Paar reeller und ein Paar konjugiert komplexer Punkte der konformen Ebene fest, die voneinander Laguerresche Vertreter sind und als Grundpunkte oder Nullkreise zwei konjugierte Kreisbüschel definieren. Nach Möbius involutorische Punktepaare liegen dabei mit diesen festen Paaren auf je einem Kreise und werden von ihnen harmonisch getrennt. Irgend zwei Kreise aus den konjugierten Kreisbüscheln schneiden sich also in einem Punktepaar der ebenen Möbius-Involution, die man auch definieren kann als Produkt der (kommutativen) Inversionen an zwei orthogonalen Kreisen des elliptischen der genannten Kreisbüschel, speziell also als Produkt der Inversion am Symmetriekreise dieses Büschels und der Spiegelung an seiner Potenzgeraden.

Zusammenfassend gilt also

Satz 10: *Die ∞^6 automorphen Projektivitäten des projizierenden Drehnetzes bilden sich im Netzriß auf die Möbiusschen Kreisverwandtschaften der konformen Bildebene ab.*

Dabei entsprechen den Jollesschen primären Involutionen des Drehnetzes die Inversionen, den Jollesschen sekundären Involutionen des Drehnetzes aber die Möbius-Involutionen der Bildebene.

6. Und jetzt folgt aus unseren Betrachtungen der schon angekündigte

Satz 11: *Eine Miquelsche Kreisfigur* (8, 8) *der in Satz* 6 *beschriebenen speziellen Art, die also aus acht Kreisen und acht Punkten besteht, bestimmt in der konformen Bildebene eine Möbius-Involution, durch die sie in sich übergeht.*

Im Raume haben dabei ihre ∞^1 windschief-kollinearen Bildtetraeder eine derart besondere Lage, daß sie als Poltetraeder und die Leitgeraden $g, \bar{g}$ des projizierenden Drehnetzes als gemeinsames Polarenpaar ∞^1 windschief-kollineare Polarsysteme bestimmen, deren Inzidenzflächen ein windschiefes Vierseit von Netzstrahlen mit g und $\bar{g}$ als Diagonalen gemeinsam haben. Diese Polaritäten induzieren unter den Netzstrahlen eine Jollessche „sekundäre" Involution.

In dieser Möbius-Involution sind einander zugeordnet die Punktepaare $(A\alpha)$, $(B\beta)$, $(C\gamma)$, $(D\delta)$ und die Kreispaare $(AB\gamma\delta, \alpha\beta CD)$, $(AC\beta\delta, \alpha\gamma BD)$, $(AD\beta\gamma, \alpha\delta BC)$, $(ABCD, \alpha\beta\gamma\delta)$.

Der Satz ist auch von konstruktiver Bedeutung. Er gibt nämlich die Möglichkeit, eine etwa durch zwei Paare involutorisch entsprechender Punkte $(A\alpha)$, $(B\beta)$ festgelegte Möbius-Involution in einfachster Weise zu vervollständigen, d. h. (Fig. 2) zu einem weiteren gegebenen Punkte, etwa C, den involutorischen γ zu konstruieren. Zu dem Ende zeichnen wir die Kreise $(A\beta C)$ und (αBC) mit dem freien Schnittpunkte δ und finden nun als freien Schnittpunkt der Kreise $(AB\delta)$ und $(\alpha\beta\delta)$ den gesuchten Punkt γ. Man hätte ebenso nach den Formeln $(ABC) \cdot (\alpha\beta C) = D$, $(A\beta D) \cdot (\alpha BD) = \gamma$ vervollständigen können, wobei D und δ ein weiteres Punktepaar der Möbius-Involution darstellen. Die insgesamt gezeichneten acht Kreise und acht Punkte bilden dann eine solche spezielle Miquelsche Kreisfigur (8, 8).

---

[17]) A. F. Möbius, Über die Involution von Punkten in der Ebene, Ber. sächs. Ges. d. Wiss. **5** (1853), S. 176—190 = Ges. Werke **2**, S. 221—236.

Es ist zu betonen, daß die vorgenommenen Konstruktionen, nämlich 1. Verbinden dreier (reeller) Punkte durch einen Kreis, 2. Auffinden des zweiten Schnittpunktes zweier Kreise, wenn der eine vorbekannt ist, entsprechend einer Forderung E. Studys [18]) im Sinne der Möbiusschen Kreisgeometrie *linear* sind.

Es folgt aus obigem auch der, hier in der Fassung von E. Müller wiedergegebene

Satz 12 [19]): *Legt man in der (konformen) Ebene durch einen Punkt D vier Kreise, so schneiden sie sich in drei Punktepaaren einer Möbiusschen Involution. Umschreibt man ferner den vier entstehenden, von Kreisbogen gebildeten Dreiseiten Kreise, so schneiden sich diese in dem D entsprechenden Punkte δ.*

Hätten wir bei obiger Vervollständigungskonstruktion C als den singulären akzessorischen (unendlichfernen) Punkt gewählt, dann wäre als entsprechender der „Zentralpunkt" γ der Möbius-Involution erhalten worden; er ist der freie Schnittpunkt der Umkreise der vier Dreiecke, die man aus dem Vierseite $[AB]$, $[\alpha\beta]$, $[A\beta]$, $[\alpha B]$ herausgreifen kann, eine Konstruktion des Zentralpunktes, die schon Möbius [20]) selbst, wenn auch mit anderer Begründung angegeben hat [21]). Die Punkte D und δ bilden jetzt das dritte Eckenpaar obigen Vierseites und es folgt die ebenfalls schon von Möbius [20]) bemerkte Tatsache, daß *die drei Gegeneckenpaare eines vollständigen Vierseites stets drei Punktepaare einer Möbius-Involution sind.* Es ist das übrigens, wie man aus unseren Überlegungen erkennen wird, im wesentlichen derselbe Sachverhalt, wie jener, den man in der Theorie der Kegelschnitte als Satz von Hesse [22]) (eigentlich Satz von v. Staudt [23])) zu benennen und so auszusprechen pflegt: *Wenn bezüglich eines Kegelschnittes zwei Paare von Gegenecken eines vollständigen Vierseites konjugiert sind, dann stets auch das dritte.*

---

[18]) E. Study, Das apollonische Problem, Math. Ann. **49** (1897), S. 496—542, insb. § 1, § 14.

[19]) A. F. Möbius, Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung, Abh. sächs. Ges. d. Wiss. **2** (1855), § 47, 9 = Ges. Werke **2**, S. 314.

E. Müller, Über einen Steinerschen Satz und dessen Beziehungen zur Konfiguration zweier einander ein- und umgeschriebener Tetraeder, Arch. Math. Phys. (3) **2** (1902), S. 135.

[20]) A. F. Möbius, Über die Involution von Punkten in der Ebene, a. a. O. S. 227.

[21]) Eine andere Konstruktion des Zentralpunktes einer Möbius-Involution hat erst vor kurzer Zeit angegeben R. Mehmke, Zur Konstruktion des Punktepaares, das im Sinne von Möbius zwei gegebene Punktepaare harmonisch trennt, Jahresber. Dtsch. Math. Ver. **37** (1928), S. 333—334. Ebenda auch eine Bemerkung von E. A. Weiß.

Eine von F. Löbell, Jahresber. Dtsch. Math. Ver. **36** (1927), S. 364 wiedergefundene Konstruktion der reellen Doppelpunkte einer Möbius-Involution geht auf L. Wedekind (u. F. Klein) Diss. Erlangen 1875, Math. Ann. **9** (1876), S. 213 zurück. Vgl. F. Löbell, Jahresber. Dtsch. Math. Ver. **38** (1929), S. 190.

[22]) O. Hesse, De octo punctis intersectionis trium superficierum secundi ordinis (Diss.) Königsberg 1840 = Crelles Journ. **20** (1840), S. 301 = Ges. Werke, München 1897, S. 42.

[23]) v. Staudt, Über die Kurven II. Ordnung (Programmschrift) Nürnberg 1831, Nr. 52.

Eingegangen 12. Februar 1932.

Neue Beweise[1]) zu den Carmichaelschen Sätzen über die Reihe $\Omega(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, g(x+n)$

Von *Ta Li* (China), z. Zt. München.

Einleitung.

In den Jahren 1916 und 1917 hat Herr Carmichael zwei Arbeiten [2]) über die Reihe $\Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g(x+n)$ veröffentlicht. Meine Arbeit soll es sein, seine Sätze auf kürzerem Wege nachzuweisen. Zu diesem Zwecke sind einleitend die von ihm gegebenen Definitionen kurz zu erwähnen.

§ 1. Allgemeine Begriffe und Definitionen.

Es seien $g(x)$ eine Funktion und $P(x)$, $Q(x)$ zwei Polynome:

$$P(x) = \mu_0 + \mu_1 x + \cdots + \mu_k x^k$$
$$Q(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_m x^m$$

derart, daß die Beziehung

$$\lim x^s \left\{ g(x)\, x^{-P(x)} e^{-Q(x)} - \sum_{\mu=0}^{s} \frac{a_\mu}{x^\mu} \right\} = \lim x^s \sum_{\mu=s+1}^{\infty} \frac{a_\mu}{x^\mu} = 0$$

mit $a_0 = 1$, a_μ unabhängig von x, für $s = 1, 2, 3, \ldots$ gilt, wenn x längs irgend einer zur reellen Achse parallel laufenden Geraden im positiven Sinne gegen Unendlich strebt, so setzt man zur Abkürzung:

$$(1) \qquad g(x) \sim x^{P(x)} e^{Q(x)} \left(1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots\right)$$

und sagt, $g(x)$ werde durch die rechte Seite asymptotisch dargestellt.

Sei $g(x)$ eine eindeutige Funktion einer komplexen Veränderlichen x mit dem asymptotischen Verhalten (1), gültig für x in einem die positive reelle Achse enthaltenden Gebiete V. Ferner wird vorausgesetzt, daß die singulären Stellen von $g(x)$ im Endlichen isolierte Punkte sind, und daß $g(x)$ in jedem endlichen Punkte x analytisch ist, welcher der Bedingung $|x| \geqq K$ genügt. Bei dem Polynomen $P(x)$ und $Q(x)$ wird vorausgesetzt, daß

$$\sigma = \begin{cases} \mu_k & \text{für } k \geqq m \\ \alpha_m & \text{für } k < m \end{cases}$$

einen negativen Realteil haben und $k + m \geqq 2$ sein soll.

---

[1]) Vortrag gehalten am 18. Februar 1932 im Mathematischen Seminar an der Universität München. — Den Herren Dozenten der Münchener Universität bin ich für ihre bei Gelegenheit des Vortrages erteilten Winke zu Dank verpflichtet.

[2]) Carmichael, R. D. a) On a general class of series of the form $\sum_{n=0}^{\infty} c_n g(x+n)$. Transactions of the American mathematical Society **17** (1916). b) on the asymptotic character of the functions defined by the series of the form $\sum_{n=0}^{\infty} c_n g(x+n)$. American Journal of Mathematics **39** (1917).

Mittels der Funktion $g(x)$ definieren wir

$$\Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g(x+n), \tag{2}$$

wobei die c's im allgemeinen von n abhängen.

Vorteilhafter ist es, anstatt $\Omega(x)$ die Reihe

$$\overline{\Omega}(x) = \frac{\Omega(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{g(x+n)}{g(x)} \tag{3}$$

zu betrachten.

Einen Wert von x, für welchen eine der Funktionen $g(x)$, $g(x+1)$, $g(x+2)$, ... [bzw. $g(x+1)/g(x)$, $g(x+2)/g(x)$, ...] eine Singularität hat, bezeichnen wir als eine außergewöhnliche Stelle von $\Omega(x)$ [bzw. $\overline{\Omega}(x)$], jeden anderen als eine gewöhnliche Stelle. Um die uns nicht interessierenden Fälle auszuschließen, wollen wir annehmen, daß es in der rechten Halb-Ebene von x ein Teilgebiet $|x| > K$ gibt, welches keine außergewöhnliche Stelle von $\Omega(x)$ und $\overline{\Omega}(x)$ enthält.

§ 2. Gleichmäßige Konvergenz der Reihen $\Omega(x)$ und $\overline{\Omega}(x)$.

Wir wollen annehmen, daß die Reihe $\Omega(x)$ bereits an einer Stelle, etwa x_0, konvergiert. Setzt man

$$v_n(x) = \frac{g(x+n)}{g(x_0+n)}$$

so kann man den folgenden Satz beweisen.

Satz I: *Für jedes x, welches der Bedingung $R(\sigma x) < R(\sigma x_0)$ genügt, ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |v_n(x)|$ konvergent; in dem Sonderfall $k = m = 1$ muß x die Bedingung $R\{\sigma(x - x_0)\} < -2$ erfüllen.*

Es ist

$$\lg\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{n}\right)^3 - \cdots,$$

wenn man nur den Hauptwert des Logarithmus nimmt, und

$$e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots.$$

Nach (1) ist

$$g(x+n) \sim e^{(\mu_k n^k + \mu_k k x n^{k-1} + \cdots)\lg n + \mu_k x n^{k-1} + \cdots + \alpha_m m x n^{m-1} + \alpha_m n^m} P_1\left(\frac{1}{n}\right), \tag{4}$$

wobei $P_1\left(\frac{1}{n}\right)$ eine Potenzreihe in $\frac{1}{n}$ mit dem konstanten Glied 1 ist. Hieraus ergibt sich:

$$|v_n(x)| = \left|\frac{g(x+n)}{g(x_0+n)}\right| \sim \left| e^{k\mu_k (x-x_0) n^{k-1} \lg n + \cdots + \alpha_m m (x-x_0) n^{m-1}} P_2\left(\frac{1}{n}\right)\right| \tag{5}$$

und

$$|n^2 v_n(x)| \sim \left| e^{\mu_k k (x-x_0) n^{k-1} \lg n + 2\lg n + \cdots + \alpha_m m (x-x_0) n^{m-1}} P_2\left(\frac{1}{n}\right)\right|, \tag{6}$$

wobei $P_2\left(\frac{1}{n}\right)$ eine für $n \to \infty$ gegen 1 konvergierende Reihe bedeutet.

Das maßgebende Glied in dem Exponenten von (5) und (6) ist $\mu_k k(x - x_0) n^{k-1} \lg n$ für $k \geqq m$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |v_n(x)|$ wird sicher konvergieren, sobald $R(\sigma x) < R(\sigma x_0)$, da (5) und (6) mit wachsendem n gegen 0 streben, und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent ist. Oder

auch, da in diesem Falle $\sigma = \mu_k$ ist: sobald $R(\sigma x) < R(\sigma x_0)$ ist. Insbesondere für $k = m = 1$ ist das Erfülltsein der Bedingung $R\{\mu_1(x - x_0)\} < -2$ notwendig und hinreichend für die Konvergenz der Reihe.

Für $m > k$ ist $\alpha_m m(x - x_0)n^{m-1}$ das maßgebende Glied. In diesem Fall ist $\sigma = \alpha_m$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |v_n(x)|$ wird sicher konvergieren, sobald $R(\sigma x) < R(\sigma x_0)$ ist. Nach der Voraussetzung von Satz I ist die Bedingung jedenfalls erfüllt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Nun können wir die Bedingung für x, damit es Konvergenzpunkt von $\Omega(x)$ wird, leicht aufstellen. Setzt man nämlich

$$u_n = c_n g(x + n) \quad \text{und} \quad v_n(x) = \frac{g(x + n)}{g(x_0 + n)},$$

so ist nach dem Dedekindschen Kriterium [3]) $\Omega(x)$ konvergent, sobald

$$\sum_{n=0}^{\infty} |v_n(x) - v_{n+1}(x)| \tag{7}$$

konvergiert. Wegen der Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} |v_n(x)|$, ist die Reihe (7) konvergent. Es gilt daher der

Satz II: *Die Reihe $\Omega(x)$ konvergiert für jedes x, welches die Bedingung $R(\sigma x) < R(\sigma x_0)$ erfüllt, also in einer Halbebene.*

Nun wollen wir noch den folgenden Satz beweisen:

Satz III: *Die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} |v_n(x)| = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{g(x + n)}{g(x_0 + n)}\right|$ *konvergiert gleichmäßig in jedem, x_0 nicht enthaltenden abgeschlossenen Gebiete G, welches innerhalb des Konvergenzbereiches B von $\Omega(x)$ liegt, und weder eine außergewöhnliche Stelle noch ihren Grenzpunkt enthält.*

Es sei $R(\sigma x_0') < R(\sigma x_0)$, und x werde auf ein Gebiet G beschränkt, in dem $R(\sigma x) \leqq R(\sigma x_0')$. Wählt man einen Punkt x_1, für den $R(\sigma x_0) > R(\sigma x_1) > R(\sigma x_0')$ ist, so ist zunächst

$$\sum_{n=0}^{\infty} |v_n(x)| \equiv \sum_{n=0}^{\infty} |v_n(x_1)| \cdot \left|\frac{v_n(x)}{v_n(x_1)}\right|.$$

Da $\sum_{n=0}^{\infty} |v_n(x_1)|$ eine konvergente Reihe mit konstanten Gliedern ist, so genügt es, nach dem Kriterium von Dirichlet [3]), zu zeigen, daß die Folge

$$\left|\frac{v_n(x)}{v_n(x_1)}\right| = \left|\frac{g(x + n)}{g(x_1 + n)}\right|$$

für alle x des genannten Gebietes gleichmäßig beschränkt ist und monoton $\to 0$ konvergiert. Die monotone Konvergenz dieser Folge ist nach (5) tatsächlich vorhanden. Es bleibt daher nur übrig, die gleichmäßige Beschränktheit der Folge nachzuweisen.

Es ist aber

$$\left|\frac{g(x + n)}{g(x_1 + n)}\right| \sim \left|e^{\mu_k k(x-x_1)n^{k-1}\lg n + \cdots + \alpha_m m(x-x_1)n^{m-1}} P_2\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leqq \left|e^{\mu_k k\delta n^{k-1}\lg n + \cdots + \alpha_m m\delta n^{m-1}} P_2\left(\frac{1}{n}\right)\right|,$$

gültig für alle x des genannten Gebietes und für $n = 1, 2, 3, \ldots$, wobei $\delta = x_0' - x_1$ ist. Da die rechte Seite wegen $R(\sigma\delta) < 0$ eine monoton abnehmende Funktion von n ist, ist unsere Folge gleichmäßig beschränkt. Damit ist unser Satz bewiesen.

Da die Teilsummen von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n g(x + n)$ infolge der vorausgesetzten Konvergenz der Reihe beschränkt sind, und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |v_n(x) - v_{n+1}(x)|$ für jedes feste x, welches

[3]) Man vergleiche etwa K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Aufl., Berlin 1931.

der Bedingung $R(\sigma x) < R(\sigma x_0) - \varepsilon$ genügt, wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} |v_n(x)|$ gleichmäßig konvergiert, folgt die Gültigkeit des Satzes:

Satz IV: *Die Reihe $\Omega(x)$ konvergiert sogar gleichmäßig für jedes x, welches die Bedingung $R(\sigma x) < R(\sigma x_0) - \varepsilon$ erfüllt, also auch in einer Halbebene.*

Aus der gleichmäßigen Konvergenz von $\Omega(x)$ ergibt sich der

Satz V: *In dem Konvergenzbereich der Reihe $\Omega(x)$ ist ihre Summe $S(x)$ analytisch, man kann ihre Ableitungen durch gliedweise Differentiation der Reihe $\Omega(x)$ erhalten.*

§ 3, Das asymptotische Verhalten von $\Omega(x)$.

Bezüglich des asymptotischen Verhaltens von $\Omega(x)$ gilt der

Satz VI: *Es ist*

$$\lim \{g(x+s)\}^{-1} \{\Omega(x) - \sum_{n=0}^{s} c_n g(x+n)\} = \lim \{g(x+s)\}^{-1} \sum_{n=s+1}^{\infty} c_n g(x+n) = 0,$$
$$\text{für} \quad s = 0, 1, 2, \ldots,$$

wenn x längs irgendeiner zur reellen Achse parallel laufenden Geraden in B_1 im positiven Sinne gegen Unendlich strebt.

Zum Beweis wollen wir die Reihe $\sum_{n=s+1}^{\infty} |w_n(x)|$ betrachten, wobei

$$w_n(x) = \frac{g(x+n)}{g(x_0+n)} \cdot \frac{g(x_0+s+1)}{g(x+s+1)}, \qquad n \geqq s+1.$$

Setzt man

$$x = x_0 + x',$$

so ist

$$\left| \frac{g(x'+x_0+n)}{g(x_0+n)} \cdot \frac{g(x_0+s+1)}{g(x'+x_0+s+1)} \right|$$
$$\sim \left| e^{P(x'+x_0+n)\lg(x'+x_0+n) - P(x_0+n)\lg(x_0+n) + Q(x'+x_0+n) - Q(x_0+n) - P(x'+x_0+s+1)\lg(x'+x_0+s+1)} \right.$$
$$\left. \cdot\, e^{-P(x_0+s+1)\lg(x_0+s+1) - Q(x'+x_0+s+1) + Q(x_0+s+1)} \right|$$

oder

$$(8) \quad |w_n(x)| \sim \left| e^{x'P'(x_0+n)\lg(x_0+n) + \cdots + x'Q'(x_0+n) + \cdots - x'P'(x_0+s+1)\lg(x_0+s+1) - \cdots - x'Q(x_0+s+1) + \cdots} \right|.$$

Da $n \geqq s+1$ ist, strebt die rechte Seite von (8) mit wachsendem n gegen 0 für $R(\sigma x') < 0$. Es ist auch

$$(9) \qquad |n^2 w_n(x)| \sim \left| e^{x'P'(x_0+n)\lg(x_0+n) + 2\lg n + \cdots - x'Q'(x_0+n) + \cdots} \right|.$$

Daher strebt die rechte Seite von (9) auch mit wachsendem n gegen 0, wenn $R(\sigma x') = R\{\sigma(x - x_0)\} < 0$ ist.

Also ist die Reihe $\sum_{n=s+1}^{\infty} |w_n(x)|$ konvergent, wenn man in dem Fall $m = k = 1$ die Bedingung $R\{\sigma(x - x_0)\} < -2$ beifügt.

Die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{n=s+1}^{\infty} |w_n(x)|$ läßt sich in ähnlicher Weise wie bei $\sum_{n=0}^{\infty} |v_n(x)|$ nachweisen. Wir wollen annehmen, daß es schon bewiesen ist, dann folgt die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$(10) \qquad \sum_{n=s+1}^{\infty} c_n \frac{g(x+n)}{g(x+s+1)}.$$

Die Konvergenz von (10) in x_0 ist aus der Konvergenz von $\Omega(x)$ in x_0 sofort abzulesen. Setzt man nun

$$u_n = c_n \frac{g(x_0+n)}{g(x_0+s+1)}, \qquad U_s = 0, \qquad U_n = u_{s+1} + u_{s+2} + \cdots + u_n \quad \text{für} \quad n \geqq s+1,$$

so haben wir:

$$\sum_{n=s+1}^{l} c_n \frac{g(x+n)}{g(x+s+1)} = \sum_{n=s+1}^{l} u_n w_n = \sum_{n=s+1}^{l} (U_n - U_{n-1}) w_n = \sum_{n=s+1}^{l} U_n w_n$$
$$- \Big(\sum_{n=s+1}^{l} U_n w_{n+1} - U_l w_{l+1} \Big) = - \sum_{n=s+1}^{l} U_n (w_{n+1} - w_n) + U_l w_{l+1} .$$

Da $\Omega(x_0)$ konvergent ist, strebt U_n gegen einen endlichen Wert M mit wachsendem n, während w_l für $R(\sigma x) < R(\sigma x_0)$ mit wachsendem l gegen 0 strebt. Es ist daher

$$\Big| \sum_{n=s+1}^{\infty} c_n \frac{g(x+n)}{g(x+s+1)} \Big| \leqq M \sum_{n=s+1}^{\infty} \Big| w_{n+1} - w_u \Big| \leqq MN = K_0.$$

Der Limes von

$$\left| \frac{g(x+s+1)}{g(x+s)} \right| \quad \text{für} \quad -R(\sigma x) \to \infty$$

ist aber gleich

$$\lim_{-R(\sigma x)\to\infty} \left| e^{P'(x+s)\lg(x+s)+\cdots+Q'(x+s)} \right| = 0.$$

Damit ist unser Satz bewiesen.

§ 4. Beispiel.

Die Funktion $1/\Gamma(x)$ hat gerade die von $g(x)$ vorausgesetzte asymptotische Eigenschaft, da nach der Stirlingschen Formel

$$\lim_{R(x)\to\infty} \frac{\Gamma(x)}{x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \sqrt{2\pi}} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\Gamma(x)} \sim x^{-x+\frac{1}{2}} e^{x-\frac{1}{2}\lg 2\pi} \quad \text{ist.}$$

Die aus $g(x) = 1/\Gamma(x)$ bestehende Reihe

$$\bar{\Omega}(x) = \Omega(x)\,\Gamma(x) = \Gamma(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\Gamma(x+n)} = c_0 + c_1 \frac{1}{x} + c_2 \frac{1}{x(x+1)} + \cdots$$

ist die einfachste Fakultätenreihe, welche für $R(x) = 1$ schon konvergiert, wenn $|c_\nu| \leqq M_0$ bleibt, also erst recht für $R(x) > 1$.

In diesem Fall, wo $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome ersten Grades sind, gilt sogar die Beziehung:

$$\lim_{R(x)\to\infty} x^s \left\{ \bar{\Omega}(x) - \sum_{n=0}^{s} c_n \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+n)} \right\} = 0.$$

Um dies einzusehen, schreibt man

$$\lim_{R(x)\to\infty} \frac{x^s \Gamma(x)}{\Gamma(x+s)} \sum_{n=s+1}^{\infty} c_n \frac{\Gamma(x+s)}{\Gamma(x+n)} = \lim_{R(x)\to\infty} \frac{x^s \Gamma(x)}{\Gamma(x+s)} \lim_{R(x)\to\infty} \sum_{n=s+1}^{\infty} c_n \frac{\Gamma(x+s)}{\Gamma(x+n)}.$$

Bedeutet $P_0\left(\frac{1}{x}\right)$ eine Potenzreihe in $\frac{1}{x}$ mit dem konstanten Glied 1, so ist

$$\lim_{R(x)\to\infty} \frac{x^s \Gamma(x)}{\Gamma(x+s)} = \lim_{R(x)\to\infty} x^{x+s-\frac{1}{2}} (x+s)^{-(x+s)+\frac{1}{2}} e^s P_0\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{R(x)\to\infty} e^s \frac{1}{\left(1+\frac{s}{x}\right)^{x+s-\frac{1}{2}}} P_0\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

und

$$\lim_{R(x)\to\infty} \sum_{n=s+1}^{\infty} c_n \frac{\Gamma(x+s)}{\Gamma(x+n)} = 0.$$

Damit ist unsere Behauptung nachgewiesen.

Eingegangen 25. Februar 1932.

Über die Fermatsche Vermutung.

Von *M. Moriya*, z. Zt. in Marburg.

Einleitung.

Maillet hat in einer Arbeit [1]) die Fermatsche Gleichung

$$x^{l^k} + y^{l^k} + z^{l^k} = 0 \qquad (xyz \neq 0),$$

behandelt, wobei l eine ungerade Primzahl, k ganze rationale positive Zahl und x, y, z ganze rationale Zahlen sind. Er bewies, daß für hinreichend großes k diese Gleichung nicht mehr gilt. In dieser Arbeit will ich dasselbe Problem mit einer anderen Methode bearbeiten, die Herr Landau in seinem Buch [2]) gebracht hat.

Für eine Primzahl $l > 3$ können wir die folgenden Sätze beweisen:

Ist die Fermatsche Gleichung

$$x^{l^k} + y^{l^k} + z^{l^k} = 0 \qquad (xyz \neq 0)$$

erfüllt, dann ist

1. $2^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^{k+1}}$,
2. $3^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^{k+1}}$,

wenn $l \nmid xyz$ ist;

3. $r^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^{k+1}}$,

wenn $r \mid x$, $l \nmid x$ oder $r \mid x - y$ und $l \nmid x^2 - y^2$.

Diese Sätze sind für $k = 1$ schon von Wieferich, Mirimanoff und Furtwängler [2]) bewiesen.

Im folgenden bedienen wir uns der Bezeichnungen:

$K_{(\nu)}$ Kreiskörper der l^ν-ten Einheitswurzeln,

$\zeta_{(\nu)}$ primitive l^ν-te Einheitswurzel $e^{\frac{2\pi i}{l^\nu}}$,

$\lambda_{(\nu)} = 1 - \zeta_{(\nu)}$,

r Primzahl $\neq l$.

$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{q}}\right)_{(\nu)}$ das Kummersche Symbol für l^ν-te Reste, d. h. $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{q}}\right)_{(\nu)} = \zeta_{(\nu)}^{a_\nu}$, wenn $\zeta_{(\nu)}^{a_\nu} \equiv \alpha^{\frac{N(\mathfrak{q})-1}{l^\nu}} \pmod{\mathfrak{q}}$, wobei $(\alpha, \mathfrak{q}) = 1$ und $\mathfrak{q}$ ein Primideal von $K_{(\nu)}$ ist.

§ 1.

Wir schicken einen Satz voraus, der eine Verallgemeinerung des Eisensteinschen Reziprozitätsgesetzes ist:

Ist r eine Primzahl mit der Kongruenzeigenschaft

$$r^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^\nu}$$

[1]) Maillet, Association française pour l'avancement des Sciences, St. Étienne, sess. **26** (1897), 2me partie, p. 156; Fortschritte d. Math. **29** (1898).

[2]) E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, Leipzig 1927, Bd. III, S. 315—319. Im folgenden zitiert mit L. III.

und α eine zu l und r prime Zahl aus $K_{(\nu)}$ mit der Kongruenzeigenschaft

$$\alpha \equiv \xi^l \pmod{\lambda_{(\nu)}^2} \qquad (\xi \text{ in } K_{(\nu)}),$$

so gilt in $K_{(\nu)}$ das Reziprozitätsgesetz

$$\left(\frac{\alpha}{r}\right)_{(\nu)} = \left(\frac{r}{\alpha}\right)_{(\nu)}$$

für $l \neq 2$ [3]).

Hilfssatz 1. Es sei γ eine ganze, zu r prime, reelle Zahl aus $K_{(\nu)}$. Dann ist

$$\left(\frac{\gamma}{r}\right)_{(\nu)} = 1.$$

Beweis: Siehe L. III, Satz 1034.

Hilfssatz 2. Aus

$$\left(\frac{\zeta_{(\nu)}}{r}\right)_{(\nu)} = 1$$

folgt

$$r^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^{\nu+1}}.$$

Beweis: Zum Beweis wenden wir vollständige Induktion an. Für $\nu = 1$ folgt aus $\left(\frac{\zeta_{(1)}}{r}\right)_{(1)} = 1$

$$r^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^2}$$ [4])

Nun nehmen wir an, daß dieser Satz bis $r - 1$ richtig ist. Dann folgt aus $\left(\frac{\zeta_{(\nu-1)}}{r}\right)_{(\nu-1)} = 1$

$$r^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^\nu}.$$

Dies zeigt, daß der Grad f eines Primteilers von r in $K_{(\nu)}$ Teiler von $l - 1$ ist. Nach einem bekannten Satz ist

$$1 = \left(\frac{\zeta_{(\nu)}}{r}\right)_{(\nu)} = \left(\frac{N(\zeta_\nu)}{r}\right)_{(\nu-1)} = \left(\frac{\zeta_{(\nu-1)}}{r}\right)_{(\nu-1)},$$

weil r zur Relativdiskriminante von $K_{(\nu)}/K_{(\nu-1)}$ teilerfremd ist. Nach der Bedeutung des Kummerschen Symbols folgt

$$\zeta_{(\nu)}^{g\frac{r^f-1}{l^\nu}} = 1,$$

wobei $gf = \varphi(l^\nu)$, also g die Anzahl der Primteiler von r in $K_{(\nu)}$ ist.

Aber g ist höchstens (und wegen $f \mid l-1$ sogar genau) durch $l^{\nu-1}$ teilbar. Also:

$$r^f - 1 \equiv 0 \pmod{l^{\nu+1}},$$
$$r^{l-1} - 1 \equiv 0 \pmod{l^{\nu+1}}.$$

Hilfssatz 3. Es sei

$$x^{l^k} + y^{l^k} + z^{l^k} = 0, \qquad (x, y, z) = 1,$$
$$r \nmid z, \quad l \nmid z, \quad r^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^k}.$$

Dann ist

$$\left(\frac{\zeta_{(k)}^y x + \zeta_{(k)}^{-x} y}{r}\right)_{(k)} = 1.$$ [5])

Beweis: Nach Voraussetzung ist

$$\prod_{m=0}^{l^k-1} (x + \zeta_{(k)}^m y) = (z)^{l^k}.$$

---

[3]) H. Hasse, Das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz der n-ten Potenzreste. Math. Ann. **97** (1927).

[4]) L. III, S. 314.

[5]) Für $k = 1$ siehe schon L. III, S. 314—315.

Da nach Voraussetzung $(x, y, z) = 1$ und z prim zu l ist, sind links je zwei Faktoren als Hauptideale in $K_{(k)}$ teilerfremd, und jeder Faktor ist l^k-te Potenz eines Ideals. Insbesondere ist für $m \equiv -x-y \pmod{l^k}$

$$(x + \zeta_{(k)}^{m} y) = (\alpha) = \mathfrak{a}^{l^k} = (\zeta_{(k)}^{y} x + \zeta_{(k)}^{-x} y).$$

Wegen

$$\zeta_{(k)}^{y} \equiv 1 - \lambda_{(k)} y \pmod{\lambda_{(k)}^2}$$

ergibt sich eine Kongruenz

$$\zeta_{(k)}^{y} x \equiv x - \lambda_{(k)} x y \pmod{\lambda_{(k)}^2}.$$

Ebenso erhält man

$$\zeta_{(k)}^{-x} y \equiv y + \lambda_{(k)} x y \pmod{\lambda_{(k)}^2}.$$

Also

$$\zeta_{(k)}^{y} x + \zeta_{(k)}^{-x} y \equiv x + y \equiv (x + y)^l \pmod{\lambda_{(k)}^2}.$$

Da $(\lambda_k) \nmid (\alpha)$ und r prim zu α, ist nach dem verallgemeinerten Eisensteinschen Reziprozitätsgesetz

$$\left(\frac{\zeta_{(k)}^{y} + \zeta_{(k)}^{-x} y}{r}\right)_{(k)} = \left(\frac{r}{(\alpha)}\right)_{(k)} = \left(\frac{r}{\mathfrak{a}}\right)_{(k)}^{l^k} = 1.$$

§ 2.

Satz 1. Es sei

$$x^{l^k} + y^{l^k} + z^{l^k} = 0, \qquad (x, y, z) = 1,$$
$$r \mid x, \qquad l \nmid x.$$

Dann ist

$$r^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^{k+1}}.$$

Beweis: Für $k = 1$ ist der Satz richtig [6]). Also nehmen wir an, daß der Satz bis $k-1$ schon bewiesen ist. Dann gilt nach Voraussetzung

$$r^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^k}. \tag{1}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man

$$l \nmid z$$

annehmen, weil $(x, y, z) = 1$.

Wegen

$$r \mid x$$

ist

$$r \nmid y, \qquad r \nmid z.$$

Wegen der Voraussetzung und (1) gilt nach Hilfssatz 3

$$\left(\frac{\zeta_{(k)}^{y} x + \zeta_{(k)}^{-x} y}{r}\right)_{(k)} = 1.$$

Wegen

$$\zeta_{(k)}^{y} x + \zeta_{(k)}^{-x} y \equiv \zeta_{(k)}^{-x} y \pmod{r}$$

ist

$$1 = \left(\frac{\zeta_{(k)}^{-x} y}{r}\right)_{(k)} = \left(\frac{y}{r}\right)_{(k)} \left(\frac{\zeta_{(k)}}{r}\right)_{(k)}^{-x}.$$

Dann folgt

$$\left(\frac{\zeta_{(k)}}{r}\right)_{(k)}^{-x} = 1,$$

weil nach Hilfssatz 1 $\left(\frac{y}{r}\right)_{(k)} = 1$ ist.

---

[6]) L. III, S. 315—316.

Da $(x, l) = 1$ ist, so muß

$$\left(\frac{\zeta_{(k)}}{r}\right)_{(k)} = 1$$

sein.

Aus $\left(\frac{\zeta_{(k)}}{r}\right)_{(k)} = 1$ folgt nach Hilfssatz 2

$$r^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^{k+1}}.$$

Satz 2. Es sei

$$x^{l^k} + y^{l^k} + z^{l^k} = 0, \qquad (x, y, z) = 1,$$
$$r \mid x - y, \quad l \nmid x^2 - y^2.$$

Dann ist

$$r^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^{k+1}}.$$

Beweis: Zuerst bemerken wir, daß dieser Satz für $k = 1$ richtig ist [7]). Nehmen wir an, daß der Satz bis $k - 1$ bewiesen ist. Also

$$r^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^k}. \tag{2}$$

Wegen

$$x + y + z \equiv 0 \pmod{l}$$

und $l \nmid x + y$ ist

$$l \nmid z.$$

Jedenfalls ist $r \nmid y$.

Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Es sei $r \mid z$. Dann ist nach Satz 1 (dort ist z durch x bezeichnet)

$$r^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^{k+1}}.$$

2. Es sei $r \nmid z$. Dies erfüllt mit (2) und $(x, y, z) = 1$ alle Bedingungen von Hilfssatz 3. Also gilt

$$\left(\frac{\zeta_{(k)}^{y} x + \zeta_{(k)}^{-x} y}{r}\right)_{(k)} = 1 .$$

Wegen $x \equiv y \pmod{r}$ ist

$$1 = \left(\frac{\zeta_{(k)}^{y} x + \zeta_{(k)}^{-x} y}{r}\right)_{(k)} = \left(\frac{\zeta_{(k)}^{y} x + \zeta_{(k)}^{-x} x}{r}\right)_{(k)} = \left(\frac{x}{r}\right)_{(k)} \left(\frac{\zeta_{(k)}^{y} + \zeta_{(k)}^{-x}}{r}\right)_{(k)} = \left(\frac{\zeta_{(k)}^{y} + \zeta_{(k)}^{-x}}{r}\right)_{(k)}$$
$$= \left(\frac{\zeta_{(k)}^{\frac{l^k+1}{2}(y-x)} \left(\zeta_{(k)}^{\frac{l^k+1}{2}(y+x)} + \zeta_{(k)}^{-\frac{l^k+1}{2}(y+x)}\right)}{r}\right)_{(k)} = \left(\frac{\zeta_{(k)}^{\frac{l^k+1}{2}(y-x)}}{r}\right)_{(k)} \left(\frac{\zeta_{(k)}^{\frac{l^k+1}{2}(y+x)} + \zeta_{(k)}^{-\frac{l^k+1}{2}(y+x)}}{r}\right)_{(k)}.$$

Der letzte Faktor hat als Zähler eine zu r prime reelle Zahl, ist also gleich 1 nach Hilfssatz 1. Daher ist

$$\left(\frac{\zeta_{(k)}}{r}\right)_{(k)}^{\frac{l^k+1}{2}(y-x)} = 1 .$$

Wegen

$$l \nmid \frac{l^k + 1}{2} (y - x)$$

ist also

$$\left(\frac{\zeta_{(k)}}{r}\right)_{(k)} = 1;$$

---

[7]) L. III, S. 316—317.

folglich

$$r^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^{k+1}}.$$

§ 3.

Es sei $l > 3$.

Satz 3. Es sei

$$x^{l^k} + y^{l^k} + z^{l^k} = 0 \qquad l \nmid xyz.$$

Dann ist

$$2^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^{k+1}}.$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei

$$(x, y, z) = 1.$$

Da x, y, z nicht sämtlich ungerade sein können, sei

$$2 \mid x$$

Nach Satz 1 ist

$$2^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^{k+1}}.$$

Satz 4. Es sei

$$x^{l^k} + y^{l^k} + z^{l^k} = 0 \qquad l \nmid xyz.$$

Dann ist

$$3^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^{k+1}}.$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei

$$(x, y, z) = 1.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle

1. Es sei

$$3 \mid xyz.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei alsdann

$$3 \mid x.$$

Dann ist nach Satz 1

$$3^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^{k+1}}.$$

2. Es sei

$$3 \nmid xyz.$$

Da

$$x^{l^k} \equiv x, \quad y^{l^k} \equiv y, \quad z^{l^k} \equiv z \pmod 3$$

ist, so gilt

$$0 \equiv x^{l^k} + y^{l^k} + z^{l^k} \equiv x + y + z \equiv \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pmod 3.$$

Das erfordert

$$x \equiv y \equiv z \pmod 3.$$

a) Es teile l nicht jede der Zahlen $x - y$, $y - z$, $z - x$.
Aus Symmetriegründen darf man

$$l \nmid x - y$$

angenommen werden. Wegen $l \nmid z$ ist

$$l \nmid x + y.$$

Also $l \nmid x^2 - y^2$. Außerdem $3 \mid x - y$.

Dann gilt

$$3^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^{k+1}}$$

nach Satz 2.

b) Es teile l jede der Zahlen $x-y$, $y-z$, $z-x$.

Dann wäre

$$x \equiv y \equiv z \pmod{l},$$
$$0 \equiv x^{l^k} + y^{l^k} + z^{l^k} \equiv 3x^{l^k} \pmod{l}.$$

Aber da $l > 3$, $l \nmid x$, geht das nicht.

Aus beiden Sätzen kann man folgern, daß die Diophantische Gleichung

$$x^{l^k} + y^{l^k} + z^{l^k} = 0, \qquad l \nmid xyz$$

für hinreichend großes k nicht mehr gilt.

Eingegangen 9. März 1932.

Über dreifache Flächensysteme, die sich in Geodätischen schneiden.

Von *Otto Volk* in Würzburg.

Sei durch

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

ein dreifaches Flächensystem gegeben; auf jeder Fläche der einen Schar sollen die Spuren der Flächen der beiden anderen Scharen Geodätische sein. Geht man von den Voßschen Gleichungen [1]) aus und stellt die Bedingungen dafür auf, daß die Parameterkurven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ auf den Flächen $w = \text{const.}$ usw. Geodätische sind, so erhält man unmittelbar den Satz [2]):

Dreifache Flächensysteme schneiden sich dann und nur dann in Geodätischen, wenn die Flächen der drei Scharen geradlinige Flächen zweiter Ordnung bzw. Ebenen sind; die Schnittkurven sind die Erzeugenden der Flächen. Diese Schnittgeraden bilden im Raume ein Liebmannnetz [3]), *d. h. sie lassen sich dreifach rhombisch anordnen.*

Im folgenden werden diese Geradennetze auf einem Wege bestimmt, der ohne weiteres auch die halbrhomboedrischen und rhomboedrischen Geradennetze liefert, bei projektivischer, elliptischer oder hyperbolischer Maßbestimmung und im Falle des n-dimensionalen Raumes zum Ziele führt.

1. Rhombische Geradennetze in der Ebene.

Setzt man:

$$y_u = p x_u, \quad y_v = q x_v, \tag{1}$$

so sind die Kurven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ Geraden, wenn die Richtungsfaktoren p, q Funktionen nur von v bzw. u sind:

$$p = p(v), \quad q = q(u); \tag{2}$$

sie lassen sich rhombisch anordnen, wenn ist:

$$(x_u^2 + y_u^2) : (x_v^2 + y_v^2) = V_1^2(v) : U_1^2(u),$$

also:

$$\sqrt{1 + p^2}\, x_u : \sqrt{1 + q^2}\, x_v = V_1 : U_1 . \tag{3}$$

Die Normierungsfunktionen U_1, V_1 kann man so wählen, daß ist:

$$\sqrt{1 + p^2} = V_1 V', \quad \sqrt{1 + q^2} = U_1 U', \tag{4}$$

---

[1]) Vgl. A. Voß, Über dreifache Flächensysteme und Ermittelung von Flächen, deren Minimalkurven durch Quadraturen bestimmt sind. Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, math.-naturwiss. Klasse **36** (1927), 4. Abhandlung.

[2]) Hierüber wird Herr A. Oraw in seiner Würzburger Dissertation ausführlich handeln.

[3]) Vgl. H. Liebmann, Rhombische Geradennetze im Raum. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, math.-naturwiss. Klasse, Jahrgang 1927, 2. Abhandlung.

somit nach (3):

$$x_u : x_v = U' : V',$$

$$x = F(U + V). \tag{5}$$

Dabei bedeuten U, V Funktionen nur von u bzw. v, über die man beliebig verfügen kann. Aus (1) kommt dann [4]):

$$y_U = pF', \quad y_V = qF'. \tag{6}$$

Die Integrabilitätsbedingung $y_{UV} = y_{VU}$ gibt:

$$G = \frac{F''}{F'} = \frac{p' - q'}{q - p}, \tag{7}$$

$$(q - p)\, G = p' - q'. \tag{8}$$

Durch Differentiation nach U und V erhält man hieraus:

$$(q - p)\, G'' = (p' - q')\, G', \tag{9}$$

somit:

$$G'' - GG' = 0, \quad 2G' - G^2 = c. \tag{10}$$

Es wird nun:

$$F_u = U'F', \quad F_{uu} = U'^2F'' + U''F',$$

also:

$$G = \frac{1}{U'} \cdot \frac{F_{uu}}{F_u} - \frac{U''}{U'^2}, \quad G' = \frac{U'F_uF_{uuu} - (U''F_u + U'F_{uu})F_{uu}}{U'^3F_u^2} - \frac{U'''U' - 2U''^2}{U'^4}.$$

Setzt man diese Werte und die entsprechenden mit den Ableitungen nach v in (10) ein, so ergibt sich:

$$\begin{cases} U'^2(2F_uF_{uuu} - 3F_{uu}^2) = F_u^2(2U'U''' - 3U''^2 + cU'^4), \\ V'^2(2F_vF_{vvv} - 3F_{vv}^2) = F_v^2(2V'V''' - 3V''^2 + cV'^4). \end{cases} \tag{11}$$

Wählt man nun U, V so, daß ist:

$$2U'U''' - 3U''^2 + cU'^4 = 2V'V''' - 3V''^2 + cV'^4 = 0, \tag{12}$$

so erhalten wir:

$$2F_uF_{uuu} - 3F_{uu}^2 = 2F_vF_{vvv} - 3F_{vv}^2 = 0. \tag{13}$$

Da nach (5) und (6)

$$G = \frac{x_{UU}}{x_U} = \frac{x_{VV}}{x_V} = \frac{y_{UU}}{y_U} = \frac{y_{VV}}{y_V}$$

ist, so folgt aus (13):

$$2x_ux_{uuu} - 3x_{uu}^2 = 2x_vx_{vvv} - 3x_{vv}^2 = 2y_uy_{uuu} - 3y_{uu}^2 = 2y_vy_{vvv} - 3y_{vv}^2 = 0,$$

was besagt, daß x und y gebrochene bilineare Funktionen von u, v sind; da $y_u : x_u$, $y_v : x_v$ Funktionen nur von v bzw. u sein müssen, so sind die Nenner die gleichen; man findet also:

$$x = \frac{a_1uv + b_1u + c_1v + d_1}{a_3uv + b_3u + c_3v + d_3}, \quad y = \frac{a_2uv + b_2u + c_2v + d_2}{a_3uv + b_3u + c_3v + d_3}, \tag{14}$$

woraus die Tangenten der Kurven zweiter Klasse als die einzigen rhombischen Geradennetze in der Ebene erkannt werden.

Umgekehrt folgt aus dem obigen, daß jede Lösung F der Differentialgleichungen (13), insbesondere jede gebrochene bilineare Funktion in u, v, durch $F = F(U + V)$ darstellbar ist, wo F, U, V sich aus (10) und (12) leicht durch Quadraturen bestimmen lassen.

---

[4]) Die Striche bei F, G, p, q bedeuten Ableitungen nach $U + V$ bzw. V bzw. U.

Führt man eine *projektivische Maßbestimmung* ein und legt den Maßkegelschnitt $x^2 + y^2 \pm 1 = 0$ zugrunde, so wird

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 \pm (x\,dy - y\,dx)^2}{(1 \pm (x^2 + y^2))^2} = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2,$$

somit nach (1) mit $y = px + p_1 = qx + q_1$ (p_1, q_1 Funktionen nur von v bzw. u):

$$e = \frac{1 + p^2 \pm p_1^2}{(1 \pm (x^2 + y^2))^2}\, x_u^2, \qquad g = \frac{1 + q^2 \pm q_1^2}{(1 \pm (x^2 + y^2))^2}\, x_v^2,$$

woraus für $e : g = V_1 : U_1$ mit entsprechender Wahl von U_1, V_1 sofort folgt:

$$x = F(U + V);$$

unsere Betrachtungen gelten auch bei projektivischer, elliptischer oder hyperbolischer Maßbestimmung [5]).

2. Dreifach rhombische Geradennetze im Raum.

Wir setzen:

$$(16) \qquad \begin{cases} y_u = px_u, & y_v = qx_v, & y_w = rx_w; \\ z_u = lx_u, & z_v = mx_v, & z_w = nx_w. \end{cases}$$

Die Kurven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sind auf den Flächen $w = \text{const.}$ usw. Geraden, wenn:

(16) $p = p(v, w)$, $l = l(v, w)$; $q = q(w, u)$, $m = m(w, u)$; $r = r(u, v)$, $n = n(u, v)$.

Sie bilden ein dreifach rhombisches Netz, wenn die Beziehung besteht:

$$(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2) : (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) : (x_w^2 + y_w^2 + z_w^2) = U'^2A^2(v, w) : V'^2B^2(w, u) : W'^2C^2(u, v),$$

wo man über die Funktionen U, V, W beliebig verfügen kann. Nach (15) muß also sein:

$$(17) \quad \sqrt{1 + p^2 + l^2}\,x_u : \sqrt{1 + q^2 + m^2}\,x_v : \sqrt{1 + r^2 + n^2}\,x_w = U'A(v, w) : V'B(w, u) : W'C(u, v).$$

Es wird also:

$$(18) \qquad t_{kU} = A_k e^F, \quad t_{kV} = B_k e^F, \quad t_{kW} = C_k e^F, \qquad (k = 1, 2, 3),$$

wo $t_1 = x$, $t_2 = y$, $t_3 = z$ zu setzen ist und die A_k, B_k, C_k Funktionen von V, W bzw. W, U bzw. U, V bedeuten. Die Integrabilitätsbedingung $t_{kVU} = t_{kUV}$ liefert:

$$(19) \qquad A_{kV} - B_{kU} = F_U B_k - F_V A_k,$$

woraus durch Differentiation nach U und V folgt:

$$F_{UV}(A_{kV} - B_{kU}) = F_{UUV} B_{kU} - F_{UVV} A_{kV},$$

somit durch Elimination von $A_{kV} - B_{kU}$ unter Beachtung der Gleichungen (18):

$$(F_{UVV} - F_V F_{UV})\, t_{kU} = (F_{UUV} - F_U F_{UV})\, t_{kV}, \qquad (k = 1, 2, 3).$$

In analoger Weise findet man:

$$(F_{VWW} - F_W F_{VW})\, t_{kV} = (F_{VVW} - F_V F_{VW})\, t_{kW},$$
$$(F_{UUW} - F_U F_{UW})\, t_{kW} = (F_{UWW} - F_W F_{UW})\, t_{kU}.$$

Da x, y, z voneinander unabhängig sein sollen, so müssen die einzelnen Faktoren verschwinden:

$$F_{UUV} - F_U F_{UV} = F_{UUW} - F_U F_{UW} = 0,$$
$$F_{VVW} - F_V F_{VW} = F_{VVU} - F_V F_{VU} = 0,$$
$$F_{WWU} - F_W F_{WU} = F_{WWV} - F_W F_{WV} = 0,$$

woraus durch Integration folgt:

$$(20) \quad 2F_{UU} - F_U^2 = U_1, \quad 2F_{VV} - F_V^2 = V_1, \quad 2F_{WW} - F_W^2 = W_1.$$

Hieraus läßt sich F leicht bestimmen.

---

[5]) Vgl. K. Strubecker, Über rhombische Netze aus Geraden und Kreisen. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, math.-naturw. Klasse, **141** (1932), S. 36.

Setzt man:

$$F = \overline{F} + \overline{U} + \overline{V} + \overline{W},$$

verfügt über die Funktionen $\overline{U}, \overline{V}, \overline{W}$ derart, daß:

$$U_1 = 2\overline{U}'' - \overline{U}'^2,\ V_1 = 2\overline{V}'' - \overline{V}'^2,\ W_1 = 2\overline{W}'' - \overline{W}'^2$$

und führt als neue Parameter $\bar{u} = \int e^{\overline{U}}\, du$, $\bar{v} = \int e^{\overline{V}} dv$, $\bar{w} = \int e^{\overline{W}} dw$ ein, so erhält man für F die Differentialgleichungen (20) mit $U_1 = V_1 = W_1 = 0$; die Gleichungen (18) haben dann nach Einführung der Parameter $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ und neuer $\bar{A}_k = A_k \cdot e^{\overline{V}+\overline{W}}$ usw. dieselbe Form; man kann also die Funktionen U_1, V_1, W_1 in (20) gleich Null setzen.
Es ist aber nicht nötig, F zu bestimmen. Nach (18) wird nämlich:

$$(21)\quad \frac{x_{UU}}{x_U} = \frac{y_{UU}}{y_U} = \frac{z_{UU}}{z_U} = F_U,\ \frac{x_{VV}}{x_V} = \frac{y_{VV}}{y_V} = \frac{z_{VV}}{z_V} = F_V,\ \frac{x_{WW}}{x_W} = \frac{y_{WW}}{y_W} = \frac{z_{WW}}{z_W} = F_W.$$

Setzt man die entprechenden Werte für F_{UU}, F_U usw. in die Gleichungen (20) ein und geht wieder zu u, v, w zurück, so kommt man bei geeigneter Wahl der Funktionen U, V, W auf die folgenden Differentialgleichungen:

$$(22)\qquad 2x_u x_{uuu} - 3x_{uu}^2 = 2x_v x_{vvv} - 3x_{vv}^2 = 2x_w x_{www} - 3x_{ww}^2 = 0,$$

die auch für y, z gelten. Die x, y, z sind also gebrochene trilineare Funktionen von u, v, w und zwar mit Rücksicht auf die Gleichungen (15) vom gleichen Nenner:

$$(23)\quad \begin{cases} x = \dfrac{a_{123}uvw + a_{12}uv + a_{13}uw + a_{23}vw + a_1 u + a_2 v + a_3 w + a_0}{d_{123}uvw + d_{12}uv + d_{13}uw + d_{23}vw + d_1 u + d_2 v + d_3 w + d_0}, \\ y = \dfrac{b_{123}uvw + b_{12}uv + b_{13}uw + b_{23}vw + b_1 u + b_2 v + b_3 w + b_0}{d_{123}uvw + d_{12}uv + d_{13}uw + d_{23}vw + d_1 u + d_2 v + d_3 w + d_0}, \\ z = \dfrac{c_{123}uvw + c_{12}uv + c_{13}uw + c_{23}vw + c_1 u + c_2 v + c_3 w + c_0}{d_{123}uvw + d_{12}uv + d_{13}uw + d_{23}vw + d_1 u + d_2 v + d_3 w + d_0}. \end{cases}$$

3. Die halbrhomboedrischen und rhomboedrischen Geradennetze.

Für die halbrhomboedrischen Netze ist:

$$A(v, w) = \overline{V}\overline{W},\ B(w, u) = \overline{W}\overline{U},$$

also bei entsprechender Wahl von U, V, W $(U = u, V = v, W' = \overline{W})$:

$$(24)\qquad \frac{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}{\overline{V}^2} = \frac{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}{\overline{U}^2} = \frac{x_w^2 + y_w^2 + z_w^2}{C(u, v)^2} = e^{2f}.$$

Durch Differentiation nach u bzw. v bzw. w folgt hieraus nach (21):

$$(25)\qquad f_u = F_u,\quad f_v = F_v,\quad f_w = F_w,\quad f = F + \text{const.}$$

Nun wird nach (19):

$$A_{kv} - B_{ku} = F_u B_k - F_v A_k,$$

somit, wenn man zweimal nach v differentiert, B_k eliminiert und die Beziehungen (21) $(U_1 = V_1 = W_1 = 0$ gesetzt) beachtet:

$$A_{kvvv} = 0,\ A_k = a_k v^2 + b_k v + c_k,$$

wo die a_k, b_k, c_k Funktionen von w und zwar höchstens vom zweiten Grade sind, da auch $A_{kwww} = 0$ sein muß. Aus (24), (18) und (25) (d. h. $f = F +$ konst.) kommt nun:

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = \text{const. } \overline{V}^2,$$

es müssen also $\sum_k a_k^2, \sum_k b_k^2, \sum_k c_k^2$ je einen konstanten Wert haben; daher müssen, weil alles reell sein soll, die a_k, b_k, c_k einzeln Konstanten sein. Die A_k werden dann Funktionen nur von v. In gleicher Weise schließt man, daß die B_k Funktionen nur von u sind. Nach (19) wird jetzt:

$$A_k F_{vw} - B_k F_{uw} = 0, \quad (k = 1, 2, 3),$$

was nur dann möglich ist, wenn $F_{vw} = F_{uw} = 0$, also:

$$F = g(w) + h(u, v).$$

Aus (18) kommt nun:

$$x_u = A_1(v)\, e^{g+h}, \quad x_v = B_1(u)\, e^{g+h}, \quad x_w = C_1(u, v)\, e^{g+h} = \overline{C}_1(u, v)\, e^{g}.$$

Aus den Integrabilitätsbedingungen $x_{uw} = x_{wu}$, $x_{vw} = x_{wv}$ findet man leicht:

$$g = \text{const.}, \ \overline{C}_1 = \text{const.}; \ x = \int (A_1\, du + B_1\, dv)\, e^{g+h} + k_1 w,$$

oder:

$$e^{g} = cw, \ \overline{C}_1 = c \int (A_1\, du + B_1\, dv)\, e^{h}; \quad x = c \int (A_1\, du + B_1\, dv)\, e^{h} \cdot w.$$

Da $\frac{x_{uu}}{x_u} = h_u$, $\frac{x_{vv}}{x_v} = h_v$ und h den zwei ersten Differentialgleichungen (21) genügt, so führen nach dem obigen die Integrale auf gebrochene bilineare Funktionen von u, v. Dasselbe gilt für y, z; somit erhält man für die halbrhomboedrischen Geradennetze [6]):

$$(26) \qquad x = \frac{a_{12}uv + a_1 u + a_2 v + a_0}{d_{12}uv + d_1 u + d_2 v + d_0} + k_1 w, \quad y = \frac{b_{12}uv + b_1 u + b_2 v + b_0}{d_{12}uv + d_1 u + d_2 v + d_0} + k_2 w,$$
$$z = \frac{c_{12}uv + c_1 u + c_2 v + c_0}{d_{12}uv + d_1 u + d_2 v + d_0} + k_3 w;$$

$$(27) \qquad x = \frac{a_{12}uv + a_1 u + a_2 v + a_0}{d_{12}uv + d_1 u + d_2 v + d_0} w, \quad y = \frac{b_{12}uv + b_1 u + b_2 v + b_0}{d_{12}uv + d_1 u + d_2 v + d_0} w,$$
$$z = \frac{c_{12}uv + c_1 u + c_2 v + c_0}{d_{12}uv + d_1 u + d_2 v + d_0} w.$$

Das die halbrhomboedrischen Geradennetze bestimmende dreifache Flächensystem besteht also aus zwei Ebenenscharen und einer Schar von parallel verschobenen oder ähnlich vergrößerten geradlinigen Flächen zweiter Ordnung.

Man erkennt unmittelbar mittels der vorhergehenden Schlußweise, daß für die rhomboedrischen Geradennetze, wo $A = \overline{V}\overline{W}$, $B = \overline{W}\overline{U}$, $C = \overline{U}\overline{V}$, alle A_k, B_k, C_k Konstante sein müssen; aus (19) und den analogen Gleichungen folgt dann unmittelbar:

$$F_u = F_v = F_w = 0,$$

somit:

$$(28) \qquad \begin{cases} x = a_1 u + b_1 v + c_1 w + d_1, \\ y = a_2 u + b_2 v + c_2 w + d_2, \\ z = a_3 u + b_3 v + c_3 w + d_3, \end{cases}$$

Die drei Scharen des ein rhomboedrisches Netz aus Geraden bildenden Flächensystems bestehen je aus parallelen Ebenen.

4. Die Übertragung der vorstehenden Betrachtungen auf den n-dimensionalen Raum sowohl bei euklidischer wie nichteuklidischer Maßbestimmung ist zwangsläufig; es erübrigt sich, darauf weiter einzugehen.

---

[6]) Vgl. P. Katilius, Über Kurvennetze und Zellteilungen. Diss. Heidelberg 1930, S. 13 ff.

Eingegangen 16. Juni 1932.

Ein allgemeines Existenztheorem für algebraische Zahlkörper.

Von *Wilhelm Grunwald* in Halle.

In meiner Dissertation [1]) habe ich zur Verwendung für das dort behandelte Problem das folgende Existenztheorem bewiesen:

I. *Es seien gegeben*:

1. *ein algebraischer Zahlkörper k von endlichem Grade,*
2. *eine endliche abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$,*
3. *ein System von endlich vielen Primstellen $\mathfrak{p}_\mathfrak{k}$ ($\mathfrak{k} = 1, \ldots, n$) in k,*
4. *den $\mathfrak{p}_\mathfrak{k}$ zugeordnet ein System von Funktionen $\chi_\mathfrak{k}(\alpha)$ der Zahlen $\alpha \neq 0$ aus k mit Werten aus $\mathfrak{G}$, mit den Eigenschaften:*

   a) $\chi_\mathfrak{k}(\alpha_1 \alpha_2) = \chi_\mathfrak{k}(\alpha_1)\, \chi_\mathfrak{k}(\alpha_2)$,

   b) *es existiert eine (früheste) Potenz $\mathfrak{f}_\mathfrak{k}$ von $\mathfrak{p}_\mathfrak{k}$ — der Führer von $\chi_\mathfrak{k}$ — derart, daß*

$$\chi_\mathfrak{k}(\alpha_0) = 1 \text{ für } \alpha_0 \equiv 1 \bmod. \mathfrak{f}_\mathfrak{k}.$$

Dann existieren unendlich viele Erweiterungskörper K von k mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ derart, daß die homomorphen Abbildungen $\chi_\mathfrak{k}(\alpha)$ der multiplikativen Restklassengruppe mod. $\mathfrak{f}_\mathfrak{k}$ *aus k in die Gruppe $\mathfrak{G}$ durch die Normenrestsymbole $\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}_\mathfrak{k}}\right)$ vermittelt werden:*

$$\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}_\mathfrak{k}}\right) = \chi_\mathfrak{k}(\alpha)\,.$$

Nun durchläuft bekanntlich das Symbol $\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}_\mathfrak{k}}\right)$ die Zerlegungsgruppe $\mathfrak{Z}_\mathfrak{k}$ bzw. die Trägheitsgruppe $\mathfrak{T}_\mathfrak{k}$ zu $\mathfrak{p}_\mathfrak{k}$ für K, wenn α alle von Null verschiedenen bzw. alle zu $\mathfrak{p}_\mathfrak{k}$ primen Zahlen aus k durchläuft. Die Ordnungen von $\mathfrak{Z}_\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{T}_\mathfrak{k}$ sind bzw. $e_\mathfrak{k} f_\mathfrak{k}$ und $e_\mathfrak{k}$, wenn $\mathfrak{p}_\mathfrak{k}$ in K in Primteiler von der Relativordnung $e_\mathfrak{k}$ und vom Relativgrade $f_\mathfrak{k}$ zerfällt [2]). Durch passende Wahl der Funktionen $\chi_\mathfrak{k}$ kann man also insbesondere die Existenz von Erweiterungskörpern K mit der abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ beweisen, in denen die vorgegebenen Primstellen $\mathfrak{p}_\mathfrak{k}$ je einen durch Angabe der Zahlen $e_\mathfrak{k}$ und $f_\mathfrak{k}$ vorgeschriebenen Zerlegungstypus haben. Indem man genau zum Ausdruck bringt, welche solchen Zerlegungstypen sich durch passende Wahl der $\chi_\mathfrak{k}$ realisieren lassen, kommt man so zu dem folgenden allgemeinen Existenztheorem [3]):

---

[1]) Charakterisierung des Normenrestsymbols durch die $\mathfrak{p}$-Stetigkeit, den vorderen Zerlegungssatz und die Produktformel, Math. Ann. **106** (1932).

[2]) Das gilt bei sinngemäßer Interpretation auch für die unendlichen Primstellen: $e_\mathfrak{k} = 1$ oder 2, je nachdem die Primteiler in K reell oder komplex sind; $f_\mathfrak{k} = 1$.

[3]) Spezielle Fälle davon wurden in drei früheren Arbeiten von H. Hasse gegeben:

1. Zwei Existenztheoreme über algebraische Zahlkörper, Math. Ann. **95** (1926).
2. Ein weiteres Existenztheorem in der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Math. Zeitschr. **24** (1926).
3. Existenz gewisser algebraischer Zahlkörper, Sitz.-Ber. d. Berliner Akad. 1927.

II. *Es seien gegeben:*

1., 2., 3. *wie in* I,

4. *den* $\mathfrak{p}_\mathfrak{t}$ *zugeordnet ein System von Zahlpaaren* $e_\mathfrak{t}$, $f_\mathfrak{t}$ *derart, daß es in* k *Zahlklassengruppen* $Z_\mathfrak{t}$ *mit den folgenden Eigenschaften gibt:*

a) *der Führer* $\mathfrak{f}_\mathfrak{t}$ *von* $Z_\mathfrak{t}$ *ist eine Potenz von* $\mathfrak{p}_\mathfrak{t}$,

b) $Z_\mathfrak{t}$ *ist zu einer Untergruppe von* $\mathfrak{G}$ *isomorph,*

c) $Z_\mathfrak{t}$ *ist von der Ordnung* $e_\mathfrak{t} f_\mathfrak{t}$,

d) *die Untergruppe* $T_\mathfrak{t}$ *derjenigen Klassen aus* $Z_\mathfrak{t}$, *die aus zu* $\mathfrak{p}_\mathfrak{t}$ *primen Zahlen bestehen, ist von der Ordnung* $e_\mathfrak{t}$.

Dann existieren unendlich viele Erweiterungskörper K *von* k *mit der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *derart, daß in ihnen die Primstellen* $\mathfrak{p}_\mathfrak{t}$ *in Primteiler der Relativordnungen* $e_\mathfrak{t}$ *und der Relativgrade* $f_\mathfrak{t}$ *zerfallen.*

Die Bedingungen a)—d) in II, 4. besagen offenbar gerade, daß der vorgegebene Zerlegungstypus $e_\mathfrak{t}$, $f_\mathfrak{t}$ mit den allgemeinen Regeln der Hilbertschen Theorie des galoisschen Körpers in Einklang sein soll. Sie lassen sich leicht in expliziter Form angeben. Besonders einfach wird das im Spezialfall einer zyklischen Gruppe $\mathfrak{G}$. Man kommt so zu dem folgenden speziellen Existenztheorem, das neuerdings in der Theorie der Algebren von ausschlaggebender Bedeutung geworden ist: [4])

III. *Es seien gegeben:*

1. *ein algebraischer Zahlkörper* k *von endlichem Grade,*

2. *eine natürliche Zahl* $m > 1$,

3. *ein System von endlich vielen Primstellen* $\mathfrak{p}_\mathfrak{t}$ $(\mathfrak{t} = 1, \ldots, n)$ *in* k,

4. *den* $\mathfrak{p}_\mathfrak{t}$ *zugeordnet ein System von Zahlpaaren* $e_\mathfrak{t}$, $f_\mathfrak{t}$ *mit den Eigenschaften:*

a) $e_\mathfrak{t} f_\mathfrak{t} \mid m$,

b) *ist* $\mathfrak{p}_\mathfrak{t}$ *endlich und* $e_\mathfrak{t}^{(0)}$ *der zu* $\mathfrak{p}_\mathfrak{t}$ *prime Bestandteil von* $e_\mathfrak{t}$, *so ist* $e_\mathfrak{t}^{(0)} \mid N(\mathfrak{p}_\mathfrak{t}) - 1$,

c) *ist* $\mathfrak{p}_\mathfrak{t}$ *unendlich und* $d_\mathfrak{t}$ $(= 1$ *oder* $2)$ *die Ordnung von* $\mathfrak{p}_\mathfrak{t}$, *so ist* $e_\mathfrak{t} \left| \frac{2}{d_\mathfrak{t}} \right.$, $f_\mathfrak{t} = 1$.

Dann existieren unendlich viele zyklische Köper K *vom Grade* m *über* k *derart, daß in ihnen die Primstellen* $\mathfrak{p}_\mathfrak{t}$ *in Primstellen der Relativordnungen* $e_\mathfrak{t}$ *und der Relativgrade* $f_\mathfrak{t}$ *zerfallen.*

Da der Beweis des Theorems I in meiner Dissertation mit Konvergenzbetrachtungen für $n \to \infty$ durchsetzt ist, will ich nachstehend den Kern dieses Beweises noch einmal gesondert und in einer etwas vereinfachten äußeren Form skizzieren.

Ich betrachte zunächst den Spezialfall einer zyklischen Gruppe $\mathfrak{G}$ von Primzahlpotenzordnung l^s.

Es sei $\mathfrak{q}$ ein nachher näher festzulegendes Hilfsprimideal, das jedenfalls den folgenden beiden Bedingungen genügen soll:

(1) $$N(\mathfrak{q}) \equiv 1 \mod l^s,$$

(2) $\mathfrak{q}$ verschieden von den $\mathfrak{p}_\mathfrak{t}$.

Wegen (1) besitzt die Gruppe der primen Restklassen mod. $\mathfrak{q}$ homomorphe Abbildungen auf den vollen Zyklus $\mathfrak{G}$; eine solche sei willkürlich herausgegriffen und mit $\chi_\mathfrak{q}$ bezeichnet (alle anderen sind davon nur unwesentlich verschieden, — Potenzen mit zu l primen Exponenten).

---

[4]) Siehe: 1. H. Hasse, Theory of cyclic algebras over an algebraic number field, Trans. Amer. Math. Soc. **34** (1932)

2. R. Brauer, H. Hasse, E. Noether, Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren, Journ. f. Math. **167** (1932).

3. H. Hasse, Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper, Math. Ann. **107** (1933).

Ich setze dann

$$\mathfrak{f} = \prod_{\mathfrak{k}} \mathfrak{f}_{\mathfrak{k}} \cdot \mathfrak{q}$$

und bilde die folgende homomorphe Abbildung der Gruppe der primen Strahlklassen mod. $\mathfrak{f}$ auf den vollen Zyklus $\mathfrak{G}$:

$$\chi(\mathfrak{a}) = \prod_{\mathfrak{k}} \chi_{\mathfrak{k}}(\alpha) \cdot \chi_{\mathfrak{q}}(\alpha), \quad \text{wenn} \quad \mathfrak{a} \underset{(l)}{\sim} \prod_{\mathfrak{i}} \mathfrak{r}_{\mathfrak{i}}^{a_{\mathfrak{i}}} \cdot \alpha.$$

Dabei bezeichnet $\mathfrak{r}_{\mathfrak{i}}$ ein Repräsentantensystem aus den Klassen von l-Potenzordnung der absoluten Idealklassengruppe von k, so daß also jedem Ideal $\mathfrak{a}$ aus k in der angegebenen Weise ein Hauptideal α aus k zuordenbar ist, und zwar eindeutig bis auf l-te Idealpotenzzahlen ϱ, was durch die Bezeichnung $\underset{(l)}{\sim}$ angedeutet ist. Die Repräsentanten $\mathfrak{r}_{\mathfrak{i}}$ seien prim zu den $\mathfrak{p}_{\mathfrak{k}}$ gewählt, und das Hilfsprimideal $\mathfrak{q}$ sei noch der Bedingung

(2′) $\qquad \mathfrak{q}$ prim zu den $\mathfrak{r}_{\mathfrak{i}}$

unterworfen, so daß also insgesamt die $\mathfrak{r}_{\mathfrak{i}}$ prim zu $\mathfrak{f}$ sind; dann können die α für zu $\mathfrak{f}$ prime $\mathfrak{a}$ ebenfalls prim zu $\mathfrak{f}$ normiert werden.

Daß $\chi(\mathfrak{a})$ wirklich eindeutig eine homomorphe Abbildung der primen Strahlklassengruppe mod. $\mathfrak{f}$ auf die Gruppe $\mathfrak{G}$ liefert, bedarf im Hinblick auf die Unbestimmtheit des α um l-te Idealpotenzzahlen ϱ noch der Begründung. Es wird dies durch passende Wahl des Hilfsprimideals $\mathfrak{q}$ erreicht. Offenbar kommt es auf die folgende Forderungsserie für $\mathfrak{q}$ hinaus:

(3) $$\prod_{\mathfrak{k}} \chi_{\mathfrak{k}}(\varrho_{\mathfrak{i}}) \cdot \chi_{\mathfrak{q}}(\varrho_{\mathfrak{i}}) = 1.$$

Dabei sollen die $\varrho_{\mathfrak{i}}$ die Elemente einer Basis der Gruppe aller $\varrho \underset{(l)}{\sim} 1$ aus k in bezug auf die Untergruppe der $\alpha \underset{(l)}{\equiv} 1$ bedeuten.

Zu dieser Bedingungsserie für die Wahl von $\mathfrak{q}$ füge ich jetzt noch eine weitere analoge Forderungsserie hinzu, um nämlich die im Satz gestellten Bedingungen zu erfüllen.

Ich bemerke dazu zunächst, daß (wenn (3) durch geeignete Wahl von $\mathfrak{q}$ realisiert ist) $\chi(\mathfrak{a}) = 1$ eine Idealgruppe H mod. $\mathfrak{f}$ vom Index l^s mit zyklischer Faktorgruppe festlegt, von der dann χ ein erzeugender Charakter ist, und damit mittelbar einen zyklischen Körper K vom Grade l^s über k als Klassenkörper zu H. Die galoissche Gruppe G von K ist dann zu $\mathfrak{G}$ isomorph. Da χ erzeugender Charakter von H ist, kann nach dem Artinschen Reziprozitätsgesetz der Isomorphismus von $\mathfrak{G}$ zu G eindeutig so festgelegt werden, daß immer das Artin-Symbol $\left(\frac{K}{\mathfrak{a}}\right)$ und der Charakterwert $\chi(\mathfrak{a})$ einander entsprechen. Ohne Mißverständnis kann dann G mit $\mathfrak{G}$ identifiziert und somit

$$\left(\frac{K}{\mathfrak{a}}\right) = \chi(\mathfrak{a})$$

geschrieben werden.

Die noch zu erfüllenden Bedingungen sind dann die, daß im gleichen Sinne die Normenrestsymbole

$$\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}_{\mathfrak{k}}}\right) = \chi_{\mathfrak{k}}(\alpha)$$

werden sollen.

Es sei $\beta_{\mathfrak{k}}$ eine zur Berechnung von $\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}_{\mathfrak{k}}}\right)$ geeignete Hilfszahl:

$$\beta_{\mathfrak{k}} \equiv \alpha \bmod \mathfrak{f}_{\mathfrak{k}}, \qquad \beta_{\mathfrak{k}} \equiv 1 \bmod \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_{\mathfrak{k}}},$$

und es sei

$$\beta_\mathfrak{k} = \mathfrak{p}_\mathfrak{k}^{b_\mathfrak{k}} \cdot \mathfrak{a}_\mathfrak{k}, \quad \mathfrak{a}_\mathfrak{k} \text{ prim zu } \mathfrak{f}.$$

Dann ist nach der Definition des Normenrestsymbols

$$\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}_\mathfrak{k}}\right) = \left(\frac{K}{\mathfrak{a}_\mathfrak{k}}\right),$$

also nach der bisherigen Konstruktion

$$= \chi(\mathfrak{a}_\mathfrak{k}).$$

Um das weiter zu berechnen, hat man gemäß der Definition von χ zunächst $\mathfrak{p}_\mathfrak{k}$ in der Form

$$\mathfrak{p}_\mathfrak{k} \underset{(\mathfrak{l})}{\sim} \prod_\mathfrak{i} \mathfrak{r}_\mathfrak{i}^{p_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}}} \cdot \pi_\mathfrak{k}$$

darzustellen, wo also $\pi_\mathfrak{k}$ eine genau durch $\mathfrak{p}_\mathfrak{k}^1$ teilbare Zahl ist. Dann wird

$$\mathfrak{a}_\mathfrak{k} = \mathfrak{p}_\mathfrak{k}^{-b_\mathfrak{k}} \cdot \beta_\mathfrak{k} \underset{(\mathfrak{l})}{\sim} \prod_\mathfrak{i} \mathfrak{r}_\mathfrak{i}^{-b_\mathfrak{k} p_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}}} \cdot \pi_\mathfrak{k}^{-b_\mathfrak{k}} \beta_\mathfrak{k},$$

und somit weiter

$$\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}_\mathfrak{k}}\right) = \chi(\mathfrak{a}_\mathfrak{k}) = \prod_{\mathfrak{k}'} \chi_{\mathfrak{k}'}(\pi_\mathfrak{k}^{-b_\mathfrak{k}} \beta_\mathfrak{k}) \cdot \chi_\mathfrak{q}(\pi_\mathfrak{k}^{-b_\mathfrak{k}} \beta_\mathfrak{k}),$$

also wegen der Eigenschaften der Hilfszahl $\beta_\mathfrak{k}$ schließlich

$$= \chi_\mathfrak{k}(\pi_\mathfrak{k}^{-b_\mathfrak{k}} \alpha) \cdot \prod_{\mathfrak{k}' \neq \mathfrak{k}} \chi_{\mathfrak{k}'}(\pi_\mathfrak{k}^{-b_\mathfrak{k}}) \cdot \chi_\mathfrak{q}(\pi_\mathfrak{k}^{-b_\mathfrak{k}})$$

$$= \chi_\mathfrak{k}(\alpha) \cdot [\chi_\mathfrak{k}(\pi_\mathfrak{k}) \cdot \prod_{\mathfrak{k}' \neq \mathfrak{k}} \chi_{\mathfrak{k}'}(\pi_\mathfrak{k}) \cdot \chi_\mathfrak{q}(\pi_\mathfrak{k})]^{-b_\mathfrak{k}}.$$

Um die gestellten Bedingungen $\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}_\mathfrak{k}}\right) = \chi_\mathfrak{k}(\alpha)$ zu erfüllen, hat man hiernach die Forderungsserie

$$\chi_\mathfrak{k}(\pi_\mathfrak{k}) \cdot \prod_{\mathfrak{k}' \neq \mathfrak{k}} \chi_{\mathfrak{k}'}(\pi_\mathfrak{k}) \cdot \chi_\mathfrak{q}(\pi_\mathfrak{k}) = 1 \tag{4}$$

hinzuzufügen, und zwar für alle endlichen unter den $\mathfrak{p}_\mathfrak{k}$. Für die unendlichen $\mathfrak{p}_\mathfrak{k}$ fällt oben $\mathfrak{p}_\mathfrak{k}^{b_\mathfrak{k}}$ weg, es wird $\mathfrak{a}_\mathfrak{k} = \beta_\mathfrak{k}$, und die ausgeführte Betrachtung lehrt, daß für diese $\mathfrak{p}_\mathfrak{k}$ die geforderten Relationen $\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}_\mathfrak{k}}\right) = \chi_\mathfrak{k}(\alpha)$ schon nach dem Bisherigen bestehen.

Die Bedingungsserien (3) und (4) sind bestimmte Forderungen für die in sie eingehenden l^s-ten Potenzcharaktere $\chi_\mathfrak{q}(\varrho_\mathfrak{i})$, $\chi_\mathfrak{q}(\pi_\mathfrak{k})$ der Zahlen $\varrho_\mathfrak{i}$, $\pi_\mathfrak{k}$ mod. $\mathfrak{q}$. Wie ich in meiner Dissertation (Hilfssatz 2) ausführlich und losgelöst von dem dortigen Zusammenhang gezeigt habe, lassen sie sich durch Primideale $\mathfrak{q}$ mit der Kongruenzeigenschaft (1.) erfüllen, und zwar durch unendlich viele solche $\mathfrak{q}$, also auch noch so, daß die Bedingungen (2.), (2'.) erfüllt sind.

Damit ist der Beweis des Theorems I im Falle einer zyklischen Gruppe $\mathfrak{G}$ von Primzahlpotenzordnung vollendet.

Um jetzt den Beweis auch im allgemeinen Falle zu erbringen, bemerke ich zunächst, daß in den konstruierten Körpern K das jeweilige Hilfsprimideal $\mathfrak{q}$ voll verzweigt ist ($\mathfrak{q} = \mathfrak{Q}^{l^s}$); denn wegen des primitiven Faktors $\chi_\mathfrak{q}$ in χ geht $\mathfrak{q}$ in den Führern der Charaktere $\chi, \chi^l, \ldots, \chi^{l^{s-1}}$ wirklich auf, und dementsprechend auch in den Relativdiskriminanten der Teilkörper der Grade $l^s, l^{s-1}, \ldots, l$ von K über k. Wegen dieses Verzweigungsverhaltens der Hilfsprimideale $\mathfrak{q}$ sind die mit verschiedenen $\mathfrak{q}$ konstruierten Körper K zu je endlich vielen unabhängig über k.

Stellt man jetzt die beliebige endliche abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ als direktes Produkt von Zyklen $\mathfrak{G}_\nu$ von Primzahlpotenzordnungen $l_\nu^{s_\nu}$ dar, und zerlegt die gegebenen Funktionen χ_t entsprechend in Komponenten $\chi_t^{(\nu)}$, so gibt es nach dem Bewiesenen unendlich viele Systeme unabhängiger zyklischer Körper K_ν der Primzahlpotenzgrade $l_\nu^{s_\nu}$ über k derart, daß

$$\left(\frac{\alpha, K_\nu}{\mathfrak{p}_t}\right) = \chi_t^{(\nu)}(\alpha)$$

ist. Die Komposita $K = \prod_\nu K_\nu$ dieser Systeme liefern dann unendlich viele verschiedene Körper K mit der Grupe $\mathfrak{G}$ derart, daß

$$\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}_t}\right) = \chi_t(\alpha)$$

ist.

Damit ist das Theorem I nunmehr vollständig bewiesen.

Eingegangen 17. Juni 1932.

Über die Konstruktion der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung im komplexen Gebiet.

Von *B. Hesselbach* in Hamm (Westf.).

Einleitung.

Im folgenden wird der Integralsatz von Cauchy nicht vorausgesetzt, wohl aber die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen im Reellen. Es wird homogen gerechnet, so daß z. B. die Gleichung $dy = dx \cdot f(x)$ in der Form zu schreiben ist:

$$z_3 \cdot f\left(\frac{z_1}{z_3}\right) \cdot dz_1 - z_3 \cdot dz_2 + \left[z_2 - z_1 \cdot f\left(\frac{z_1}{z_3}\right)\right] dz_3 = 0.$$

Allgemein wird im folgenden die Differentialgleichung

$$w_1 \cdot dz_1 + w_2 \cdot dz_2 + w_3 \cdot dz_3 = 0$$

behandelt und gezeigt, daß die Integralkurven Kontinua mit zwei reellen Dimensionen sind und sich gegenseitig nicht schneiden. Dies Resultat ist mit dem Integralsatz von Cauchy äquivalent.

§ 1. Die Herstellung der Integralfäden.

In einem Gebiet G der ins Komplexe fortgesetzten Ebene der homogenen komplexen Variabeln z_1, z_2, z_3 habe man die 3 homogenen Funktionen w_1, w_2, w_3. Diese seien in G nicht zugleich null und seien dort stetig differenzierbar, das heißt die Funktionen

$$\frac{1}{z_1 - x_1}\left[w(z_1, z_2, z_3) - w(x_1, z_2, z_3)\right] \text{ etc.}$$

seien in G stetig. Ferner seien w_1, w_2, w_3 von der gleichen Dimension m, also

$$\frac{\partial w_k}{\partial z_1} z_1 + \frac{\partial w_k}{\partial z_2} z_2 + \frac{\partial w_k}{\partial z_3} z_3 = m \cdot w_k.$$

Schließlich gelte die Koinzidenzbedingung:

$$w_1 \cdot z_1 + w_2 \cdot z_2 + w_3 \cdot z_3 = 0.$$

Es ist daher zweckmäßig, die w als Koordinaten einer Geraden durch den Punkt z zu interpretieren.

Die zu integrierende Differentialgleichung heiße:

$$w_1 \cdot dz_1 + w_2 \cdot dz_2 + w_3 \cdot dz_3 = 0.$$

Man kann beliebig viele Integralfäden dieser Differentialgleichung herstellen. Um etwas bestimmtes vor Augen zu haben, soll ein Integralfaden auf einer beliebigen Geradenschar $g(\sigma)$ gesucht werden, wobei σ ein reeller Parameter ist. Dabei soll der Faden durch den beliebigen Punkt z^0 der Geraden $g(0)$ laufen. Wenn jede Gerade der Schar durch zwei ihrer Punkte $\xi(\sigma)$ und $\eta(\sigma)$ in G gegeben ist, wobei die Koordinaten ξ_ι und η_ι stetig differentierbare Funktionen von σ sind, so ist

$$z(\sigma) = p \cdot \xi + q \cdot \eta$$

so zu bestimmen, daß

$$\sum_1^3 w_\iota \cdot \frac{dz_\iota}{d\sigma} = 0 \quad \text{ist,}$$

also:

$$\Sigma w_\iota((p\xi + q\eta)) \cdot (p'\xi_\iota + q'\eta_\iota + p\xi_\iota' + q\eta_\iota') = 0.$$

Wenn man $p(\sigma)$ willkürlich wählt, hat man für q die Differentialgleichung

$$q' \cdot \Sigma \eta_\iota w_\iota = -\Sigma w_\iota \cdot (q\eta_\iota' + p\xi_\iota' + p'\xi_\iota).$$

Wenn die Gerade $g(0)$ nicht die Gerade $w((z^0))$ ist, kann $\eta(\sigma)$ in der Umgebung von $\sigma = 0$ so bestimmt werden, daß $\Sigma \eta_\iota w_\iota \neq 0$ ist. Dann hat man für die Funktion $q(\sigma)$ eine eindeutig lösbare Differentialgleichung, soweit $w((z(\sigma)))$ nicht $g(\sigma)$ ist.

Man kann den Integrationsweg $g(\sigma)$ so legen, daß auf dem ganzen Faden z' von z linear unabhängig ist. Nämlich aus $z' + \varphi \cdot z = 0$ folgt

$$(p' + \varphi p)\xi + (q' + \varphi q)\eta + p\xi' + q\eta' = 0 ;$$
$$(p' + \varphi p) : (q' + \varphi q) : p : q = \| \xi, \eta, \xi', \eta' \| ;$$
$$z = p\xi + q\eta = |\xi, \eta, \eta'| \cdot \xi - |\xi, \eta, \xi'| \cdot \eta .$$

Man hat demnach $g(\sigma)$ so zu legen, daß $|\xi, \eta, \eta'| \cdot \xi - |\xi, \eta, \xi'| \cdot \eta \neq 0$ ist, und daß die Momentanpunkte $z = |\xi, \eta, \eta'| \cdot \xi - |\xi, \eta, \xi'| \cdot \eta$ nicht in G liegen. Diese Bedingung ist unabhängig von der Vorgabe der (w).

§ 2. Die Herstellung einer komplexen Integralkurve.

Man habe nun eine Gradenschar $g(\sigma, \tau)$ durch die Punkte $\xi(\sigma, \tau)$ und $\eta(\sigma, \tau)$. Die Koordinaten ξ_ι und η_ι seien nach den beiden reellen Parametern σ und τ zweimal stetig differenzierbar. Und sei $g(\sigma, 0) = g(\sigma)$. Bei festgehaltenem σ sei jetzt die Gleichung $\Sigma w_\iota \cdot \frac{\partial z_\iota}{\partial \tau} = 0$ integriert, wobei $z = p\xi + q\eta$, und von den Punkten $z(\sigma)$ des ersten Integralfadens ausgegangen wird. Man hat also eine Schar von Differentialgleichungen für $p(\tau)$ resp. $q(\tau)$. Nach der Theorie der Differentialgleichungen bilden dann die Punkte $z(\sigma, \tau)$ eine stetige Fläche, wenn sie nicht alle auf den Faden $z(\sigma)$ fallen. Es soll nun gezeigt werden, daß auf dieser Fläche überall

$$\Sigma w_\iota \cdot \frac{\partial z_\iota}{\partial \sigma} = 0$$

ist, und daß überall die Determinante $\left| z, \frac{\partial z}{\partial \sigma}, \frac{\partial z}{\partial \tau} \right|$ verschwindet.

Es genügt nur das eine zu beweisen, denn die beiden Gleichungen sind einander äquivalent. Nämlich aus

$$\Sigma w_\iota z_\iota = 0 \text{ und } \Sigma w_\iota \frac{\partial z_\iota}{\partial \tau} = 0 \text{ und } \Sigma w_\iota \frac{\partial z_\iota}{\partial \sigma} = 0 \text{ folgt } \left| z, \frac{\partial z}{\partial \sigma}, \frac{\partial z}{\partial \tau} \right| = 0,$$

und aus $\left| z, \frac{\partial z}{\partial \sigma}, \frac{\partial z}{\partial \tau} \right| = 0$ folgt, daß $\frac{\partial z}{\partial \sigma}$ in der Form dargestellt werden kann $\frac{\partial z}{\partial \sigma} = \varphi \cdot z + \psi \cdot \frac{\partial z}{\partial \tau}$, sofern man annimmt, daß die Momentanpunkte der Scharen $g(\cdot, \tau)$ außerhalb G liegen.
Auf der ganzen Fläche gilt

$$\Sigma w_\iota \cdot \frac{\partial z_\iota}{\partial \tau} = 0.$$

Durch Differentiation kommt:

$$\sum w_\iota \cdot \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial z_\iota}{\partial \sigma}\right) + \sum \frac{\partial w_\iota}{\partial z_\varkappa} \cdot \frac{\partial z_\varkappa}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial z_\iota}{\partial \tau} = 0.$$

Nämlich nach der Theorie der Differentialgleichungen ist z nach σ differenzierbar und genügt der Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\sigma\,\partial\tau} = \frac{\partial^2 z}{\partial\tau\,\partial\sigma}.$$

Es folgt weiter:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\sum w_\iota \cdot \frac{\partial z_\iota}{\partial\sigma} + \sum \frac{\partial w_\iota}{\partial z_\varkappa}\left(\frac{\partial z_\varkappa}{\partial\sigma}\frac{\partial z_\iota}{\partial\tau} - \frac{\partial z_\varkappa}{\partial\tau}\frac{\partial z_\iota}{\partial\sigma}\right) = 0.$$

Setzt man hier $\frac{\partial z}{\partial\sigma} = \frac{\partial p}{\partial\sigma}\xi + \frac{\partial q}{\partial\sigma}\eta + p\frac{\partial\xi}{\partial\sigma} + q\frac{\partial\eta}{\partial\sigma}$, so bekommt man eine Differentialgleichung für $\frac{\partial q}{\partial\sigma}$. Wenn auch $\frac{\partial q}{\partial\sigma}$ eine schon definierte Funktion von τ ist, so soll es doch an allen Stellen, wo es in der Differentialgleichung vorkommt, als unbekannte Funktion von τ angesehen werden. Man kann nun eine Lösung der Differentialgleichung angeben, indem man $\frac{\partial q}{\partial\sigma}$ durch die Gleichung $\sum w_\iota \frac{\partial z_\iota}{\partial\sigma} = 0$ bestimmt. Man bekommt dann: $\frac{\partial q}{\partial\sigma}\cdot\sum w_\iota\eta_\iota = \sum w_\iota\left(p\cdot\frac{\partial\xi}{\partial\sigma} + q\cdot\frac{\partial\eta}{\partial\sigma}\right) + \frac{\partial p}{\partial\sigma}w_\iota\xi_\iota$. Diese Funktion $\frac{\partial q}{\partial\sigma}$ ist also die einzige, für welche $\sum w_\iota\frac{\partial z_\iota}{\partial\sigma} = 0$ ist. Es ist zu zeigen, daß die Differentialgleichung erfüllt ist.

Aus $\sum w_\iota\frac{\partial z_\iota}{\partial\sigma} = 0$ folgt, daß $\frac{\partial z}{\partial\sigma}$ von z und $\frac{\partial z}{\partial\tau}$ linear abhängt, und die Differentialgleichung wird:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\tau}\sum w_\iota\frac{\partial z_\iota}{\partial\sigma} + \sum\frac{\partial w_\iota}{\partial z_\varkappa}\left(\frac{\partial z_\varkappa}{\partial\sigma}\frac{\partial z_\iota}{\partial\tau} - \frac{\partial z_\varkappa}{\partial\tau}\frac{\partial z_\iota}{\partial\sigma}\right)\\
&= \sum\frac{\partial w_\iota}{\partial z_\varkappa}\left[\left(\varphi z_\varkappa + \psi\frac{\partial z_\varkappa}{\partial\tau}\right)\frac{\partial z_\iota}{\partial\tau} - \left(\varphi z_\iota + \psi\frac{\partial z_\iota}{\partial\tau}\right)\frac{\partial z_\varkappa}{\partial\tau}\right] = \varphi\sum\frac{\partial w_\iota}{\partial z_\varkappa}\left(z_\varkappa\frac{\partial z_\iota}{\partial\tau} - z_\iota\frac{\partial z_\varkappa}{\partial\tau}\right)\\
&= \varphi\sum m\cdot w_\iota\cdot\frac{\partial z_\iota}{\partial\tau} - \frac{\partial w_\iota}{\partial\tau}z_\iota = -\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial\tau}\sum w_\iota z_\iota = 0.
\end{aligned}$$

Da bei $\tau = 0$ der Faden $z(\sigma)$ auch die Gleichungen erfüllt:

$$\sum w_\iota\cdot\frac{\partial z_\iota}{\partial\sigma} = 0 \quad\text{und}\quad \frac{\partial z_\iota}{\partial\sigma} = \frac{\partial p}{\partial\sigma}\xi + \frac{\partial q}{\partial\sigma}\eta + p\frac{\partial\xi}{\partial\sigma} + q\frac{\partial\eta}{\partial\sigma},$$

und da die Lösung der Differentialgleichung eindeutig ist, so gilt für $\frac{\partial}{\partial\sigma}(q)$ die Gleichung $\sum w_\iota\frac{\partial z_\iota}{\partial\sigma} = 0$. q. e. d.

Jeder weitere Faden, der auf der Fläche $z(\sigma, \tau)$ liegt, ist ein Integralfaden, erfüllt also die Gleichung $\Sigma w_\iota dz_\iota = 0$, da ja $dz = \frac{\partial z}{\partial\sigma}d\sigma + \frac{\partial z}{\partial\tau}d\tau$ ist.

Wenn z^0 ein innerer Punkt der Fläche ist, so gibt es keinen Integralfaden durch z^0, der nicht in der Fläche liegt. Man kann nämlich leicht eine Geradenschar $g(\sigma, \tau)$ zeichnen, welche die Umgebung von z^0 ganz bedeckt und die Gerade $w((z^0))$ nicht enthält. Die durch einen Integralfaden laufende Teilschar trifft die Fläche auch in einem Integralfaden, und man kann den Satz anwenden, daß die Gleichung $\Sigma w_\iota dz_\iota = 0$ auf der Teilschar nur eine Lösung durch z^0 hat.

Eingegangen 23. Juli 1932.

Teilerprobleme.

Dritte Abhandlung [1]).

Von *Arnold Walfisz* in Radość (Polen).

Für $-1 \leqq \theta \leqq 1$ bezeichne $\sigma_\theta(n)$ die Summe der θ-ten Potenzen aller positiven Teiler einer natürlichen Zahl n, $S_\theta(x)$ sei die zugehörige summatorische Funktion — in Zeichen

$$\sigma_\theta(n) = \sum_{d|n}{}' d^\theta, \qquad S_\theta(x) = \sum_{n \leqq x}{}' \sigma_\theta(n).$$

γ bedeute die Eulersche Konstante. Ich setze

$$S_{-1}(x) = \frac{\pi^2}{6}\, x - \frac{1}{2} \log x + T_{-1}(x), \tag{1}$$

$$S_\theta(x) = \zeta(1-\theta)\, x + \frac{\zeta(1+\theta)}{1+\theta}\, x^{1+\theta} + T_\theta(x) \quad (-1 < \theta < 1,\ \theta \neq 0), \tag{2}$$

$$S_0(x) = x \log x + (2\gamma - 1)x + T_0(x), \tag{3}$$

$$S_1(x) = \frac{\pi^2}{12}\, x^2 + T_1(x). \tag{4}$$

Für das Fehlerquadratintegral

$$U_\theta(x) = \int_1^x T_\theta^2(u)\, du$$

sind folgende Abschätzungen bekannt:

$$U_{-1}(x) = \left(\left(\frac{\gamma + \log 2\pi}{2}\right)^2 + \frac{5\pi^2}{144}\right) x + O(x^{\frac{1}{2}} \log x), \tag{5}$$

$$U_\theta(x) = \left(\frac{1}{4}\, \zeta^2(-\theta) + \frac{1}{12}\, \frac{\zeta(-2\theta)\, \zeta^2(1-\theta)}{\zeta(2-2\theta)}\right) x + O(x^{\frac{3}{2}+\theta} \log x) \tag{6}$$

$$\left(-1 < \theta < -\frac{1}{2}\right),$$

$$U_{-\frac{1}{2}}(x) = O(x \log x), \tag{7}$$

$$U_\theta(x) \sim \frac{1}{(4\theta+6)\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sigma_\theta(n)}{n^{\frac{2\theta+3}{4}}}\right)^2 x^{\frac{3}{2}+\theta} \qquad \left(-\frac{1}{2} < \theta < \frac{1}{2}\right). \tag{8}$$

$$U_0(x) = \frac{1}{6\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sigma_0(n)}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^2 x^{\frac{3}{2}} + O\left(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon}\right), \tag{9}$$

$$U_{\frac{1}{2}}(x) = O(x^2 \log x), \tag{10}$$

---

[1]) Die ersten beiden gleichnamigen Abhandlungen sind in der Mathematischen Zeitschrift **26** (1927), S. 66—88 und **34** (1931), S. 448—472 erschienen (ich nenne sie kurz I und II).

$$U_\theta(x) \sim \frac{\zeta(2\theta)\,\zeta^2(1+\theta)}{12(2\theta+1)\,\zeta(2+2\theta)}\,x^{1+2\theta} \qquad \left(\frac{1}{2} < \theta < 1\right), \tag{11}$$

$$U_1(x) = \frac{36+5\pi^2}{432}\,x^3 + O(x^{\frac{5}{2}}\log x). \tag{12}$$

In (1) bis (4) stehen vor $T_\theta(x)$ die Hauptglieder bei der Abschätzung von $S_\theta(x)$; in (2), (3), (4) lassen sich diese leicht aussondern, in (1) dagegen ist es nur mit Hilfe des Weylschen Satzes aus der Theorie der Diophantischen Näherungen möglich [2]).

(5) und (12) habe ich in II erledigt; anschließend brachte S. Chowla (6), (7), (10) und (11) [3]). Auf anderem Wege hatte H. Cramér (8) [4]) und (9) [5]) nachgewiesen. Man kann diese beiden Formeln den übrigen angleichen, wenn man von der Ramanujanschen Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_\theta^2(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\,\zeta^2(s-\theta)\,\zeta(s-2\theta)}{\zeta(2s-2\theta)} \tag{13}$$ [6])

Gebrauch macht. (8) und (9) sehen dann so aus:

$$U_\theta(x) \sim \frac{\zeta^2\left(\frac{3}{2}\right)\zeta\left(\theta+\frac{3}{2}\right)\zeta\left(-\theta+\frac{3}{2}\right)}{\pi^2\,\zeta(3)\,(4\theta+6)}\,x^{\frac{3}{2}+\theta} \qquad \left(-\frac{1}{2} < \theta < \frac{1}{2}\right),$$

$$U_0(x) = \frac{\zeta^4\left(\frac{3}{2}\right)}{6\pi^2\,\zeta(3)}\,x^{\frac{3}{2}} + O(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon}).$$

Im Grenzfalle $\theta = \pm\frac{1}{2}$ steht noch die Bestimmung des Hauptgliedes aus. Ich hole dies im folgenden nach und zeige, durch eine Verschärfung meiner Methode, daß

$$U_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{\zeta^2\left(\frac{3}{2}\right)}{24\,\zeta(3)}\,x\log x + O(x), \tag{14}$$

$$U_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{\zeta^2\left(\frac{3}{2}\right)}{48\,\zeta(3)}\,x^2\log x + O(x^2) \tag{15}$$

ist.

Folgende Festsetzungen mögen für die ganze vorliegende Arbeit gelten: Mit B bezeichne ich unterschiedslos reelle Zahlen, die von allem Möglichen abhängen dürfen, absolut genommen jedoch unterhalb numerischer Konstanten liegen. Es sei

$$\psi(v) = v - [v] - \frac{1}{2}.$$

---

[2]) Auf diese Weise habe ich in I bewiesen:

$$T_{-1}(x) = O\left(\frac{\log x}{\log\log x}\right).$$

[3]) S. Chowla „Contributions to the analytic theory of numbers" [Mathematische Zeitschrift **35** (1932), S. 279—299], im folgenden kurz C genannt.

[4]) H. Cramér „Contributions to the analytic theory of numbers" [Verhandlungen des V. Skandinavischen Mathematiker-Kongresses in Helsingfors 1922 (Helsingfors 1923), S. 266—272].

[5]) H. Cramér „Über zwei Sätze des Herrn G. H. Hardy" [Mathematische Zeitschrift **15** (1922), S. 201—210].

[6]) S. Ramanujan „Some formulae in the analytic theory of numbers" [Messenger of Mathematics **45** (1916), S. 81—84 oder auch Collected Papers of Srinivasa Ramanujan (Cambridge 1927), S. 133—136], Formel (15). Für den Beweis vgl. B. M. Wilson „Proofs of some formulae enunciated by Ramanujan" [Proceedings of the London Mathematical Society (ser. 2) **21** (1922), S. 235—255].

Die nicht kleinere der beiden Zahlen v und w heiße Max $(v; w)$, die nicht größere Min $(v; w)$; dagegen bedeute (v, w) den größten gemeinsamen Teiler der beiden ganzen Zahlen v und w.

Es sei stets $x \geqq 3$, $u \geqq 1$, $E_1 = 0$ oder 1, $E_2 = 0$ oder 1, $\delta = \frac{1}{32}$.

Falls untere Summationsgrenzen nicht ausdrücklich angegeben werden, sind sie stets Eins. Die fetten Zahlen geben Nummern von Formeln an, die an den betreffenden Stellen benutzt werden, sind also als Hinweise zu verstehen.

Hilfssatz 1: *Mit*

(16) $$c = \text{Max}\,(a^2; b^2)\ ^7)$$

ist

(17) $$U_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{E_1, E_2 = 0}^{1} \sum_{a, b \leqq \sqrt{x}} a^{E_1 - \frac{1}{2}}\, b^{E_2 - \frac{1}{2}} \int_c^x \psi\left(\frac{u}{a}\right) \psi\left(\frac{u}{b}\right) u^{-\frac{E_1 + E_2}{2}}\, du + Bx.$$

Dies ist der Spezialfall $\theta = -\frac{1}{2}$ von C, Lemma 17.

Hilfssatz 2:

(18) $$\sum_{\substack{m, n \leqq x^2 \\ mb = na}} \frac{1}{mn} = \frac{\pi^2}{6} \frac{(a, b)^2}{ab} + \frac{B}{x^2}.$$

Beweis:

$$mb = na; \qquad m \frac{b}{(a, b)} = n \frac{a}{(a, b)}; \qquad m = \mu \frac{a}{(a, b)}, \qquad n = \nu \frac{b}{(a, b)};$$

$$\mu \frac{ab}{(a, b)^2} = \nu \frac{ab}{(a, b)^2}; \qquad \mu = \nu;$$

(19) $$m = \mu \frac{a}{(a, b)}, \qquad n = \mu \frac{b}{(a, b)}.$$

(20) $$\sum_{\substack{m, n = 1 \\ mb = na}}^{\infty} \frac{1}{mn} = \frac{(a, b)^2}{ab} \sum_{\mu = 1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2} = \frac{\pi^2}{6} \frac{(a, b)^2}{ab} \qquad \textbf{(19)}.$$

$$\sum_{\substack{m > x^2, n \geqq 1 \\ mb = na}} \frac{1}{mn} = B \frac{(a, b)^2}{ab} \sum_{\mu \frac{a}{(a, b)} > x^2} \frac{1}{\mu^2} \qquad \textbf{(19)}$$

(21) $$= B \frac{(a, b)^2}{ab} \sum_{\mu > \frac{(a, b)}{a} x^2} \frac{1}{\mu^2} = B \frac{(a, b)^2}{ab} \frac{a}{(a, b) x^2} = B \frac{(a, b)}{bx^2} = \frac{B}{x^2}.$$

(22) $$\sum_{\substack{n > x^2, m \geqq 1 \\ mb = na}} \frac{1}{mn} = \frac{B}{x^2} \qquad \textbf{(21)}$$

(ich habe m mit n, a mit b vertauscht).

$$\sum_{\substack{m, n \leqq x^2 \\ mb = na}} \frac{1}{mn} = \sum_{\substack{m, n = 1 \\ mb = na}}^{\infty} \frac{1}{mn} + B \sum_{\substack{m > x^2, n \geqq 1 \\ mb = na}} \frac{1}{mn} + B \sum_{\substack{n > x^2, m \geqq 1 \\ mb = na}} \frac{1}{mn}$$

(18) $$= \frac{\pi^2}{6} \frac{(a, b)^2}{ab} + \frac{B}{x^2} \qquad \textbf{(20, 21, 22)}.$$

---

7) c habe stets diese Bedeutung!

Hilfssatz 3:

$$\sum_{\substack{a,b=1\\(a,b)=1}}^{\infty} \frac{1}{(ab)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\zeta^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\zeta(3)}. \tag{23}$$

Dies ist der Spezialfall $\theta = -\frac{1}{2}$ von C, (75).

Hilfssatz 4:

$$\frac{1}{2\pi^2} \sum_{a,b \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{ab}} \sum_{\substack{m,n \leqq x^2\\ mb=na}} \frac{1}{mn} \int_c^x du = \frac{\zeta^2\left(\frac{3}{2}\right)}{24\,\zeta(3)}\, x \log x + Bx. \tag{24}$$

Beweis:

$$\frac{1}{2\pi^2} \sum_{a,b \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{ab}} \sum_{\substack{m,n \leqq x^2\\ mb=na}} \frac{1}{mn} \int_c^x du = \frac{1}{12} \sum_{a,b \leqq \sqrt{x}} \frac{(a,b)^2}{(ab)^{\frac{3}{2}}} \int_c^x du + \frac{B}{x^2} \sum_{a,b \leqq \sqrt{x}} \frac{x}{\sqrt{ab}} \qquad \textbf{(18)}$$

$$= \frac{1}{12} \int_1^x \sum_{a,b \leqq \sqrt{u}} \frac{(a,b)^2}{(ab)^{\frac{3}{2}}}\, du + Bx \qquad \textbf{(16)}. \tag{25}$$

$$\sum_{a,b \leqq \sqrt{u}} \frac{(a,b)^2}{(ab)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{d \leqq \sqrt{u}} d^2 \sum_{\substack{a,b \leqq \sqrt{u}\\(a,b)=d}} \frac{1}{(ab)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{d \leqq \sqrt{u}} d^2 \sum_{\substack{a,b \leqq \frac{\sqrt{u}}{d}\\(a,b)=1}} \frac{1}{d^3 (ab)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \sum_{d \leqq \sqrt{u}} \frac{1}{d} \sum_{\substack{a,b \leqq \frac{\sqrt{u}}{d}\\(a,b)=1}} \frac{1}{(ab)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{d \leqq \sqrt{u}} \frac{1}{d} \sum_{\substack{a,b=1\\(a,b)=1}}^{\infty} \frac{1}{(ab)^{\frac{3}{2}}} + B \sum_{d \leqq \sqrt{u}} \frac{1}{d} \sum_{a > \frac{\sqrt{u}}{d}} \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} \sum_{b=1}^{\infty} \frac{1}{b^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\zeta^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\zeta(3)} \sum_{d \leqq \sqrt{u}} \frac{1}{d} + B \sum_{d \leqq \sqrt{u}} \frac{1}{d} \frac{\sqrt{d}}{\sqrt[4]{u}} \qquad \textbf{(23)}$$

$$= \frac{\zeta^2\left(\frac{3}{2}\right)}{2\,\zeta(3)} \log u + B. \tag{26}$$

$$\frac{1}{2\pi^2} \sum_{a,b \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{ab}} \sum_{\substack{m,n \leqq x^2\\ mb=na}} \frac{1}{mn} \int_c^x du = \frac{\zeta^2\left(\frac{3}{2}\right)}{24\,\zeta(3)} \int_1^x \log u\, du + Bx \qquad \textbf{(25, 26)}$$

$$= \frac{\zeta^2\left(\frac{3}{2}\right)}{24\,\zeta(3)}\, x \log x + Bx. \tag{24}$$

Hilfssatz 5:

$$\sum_{a,b \leqq \sqrt{x}} \sqrt{\frac{b}{a}} \sum_{\substack{m,n \leqq x^2\\ mb=na}} \frac{1}{mn} \int_c^x \frac{du}{\sqrt{u}} = Bx, \tag{27}$$

$$\sum_{a,b \leqq \sqrt{x}} \sqrt{\frac{a}{b}} \sum_{\substack{m,n \leqq x^2\\ mb=na}} \frac{1}{mn} \int_c^x \frac{du}{\sqrt{u}} = Bx. \tag{28}$$

Beweis: Der Spezialfall $\theta = -\frac{1}{2}$ von C, (94) besagt:

$$\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}\sqrt{\frac{b}{a}}\sum_{\substack{m,n=1\\mb=na}}^{\infty}\frac{1}{mn}\int_c^x\frac{du}{\sqrt{u}}=Bx.$$

Also ist (27) erfüllt. Vertauscht man a mit b und m mit n, so geht (27) in (28) über.

Hilfssatz 6:

$$\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}\sqrt{ab}\sum_{\substack{m,n\leqq x^2\\mb=na}}\frac{1}{mn}\int_c^x\frac{du}{u}=Bx. \tag{29}$$

Beweis:

$$\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}\sqrt{ab}\sum_{\substack{m,n\leqq x^2\\mb=na}}\frac{1}{mn}\int_c^x\frac{du}{u}=B\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}\sqrt{ab}\sum_{\substack{m,n=1\\mb=na}}^{\infty}\frac{1}{mn}\int_c^x\frac{du}{u}$$

$$=B\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}\frac{(a,b)^2}{\sqrt{ab}}\int_c^x\frac{du}{u}=B\int_1^x\sum_{a,b\leqq\sqrt{u}}\frac{(a,b)^2}{\sqrt{ab}}\frac{du}{u}\qquad(20,\ 16). \tag{30}$$

$$\sum_{a,b\leqq\sqrt{u}}\frac{(a,b)^2}{\sqrt{ab}}=\sum_{d\leqq\sqrt{u}}d^2\sum_{\substack{a,b\leqq\sqrt{u}\\(a,b)=d}}\frac{1}{\sqrt{ab}}=\sum_{d\leqq\sqrt{u}}d^2\sum_{\substack{a,b\leqq\frac{\sqrt{u}}{d}\\(a,b)=1}}\frac{1}{d\sqrt{ab}}$$

$$=B\sum_{d\leqq\sqrt{u}}d\sum_{a,b\leqq\frac{\sqrt{u}}{d}}\frac{1}{\sqrt{ab}}=B\sum_{d\leqq\sqrt{u}}d\frac{\sqrt{u}}{d}=Bu. \tag{31}$$

$$\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}\sqrt{ab}\sum_{\substack{m,n\leqq x^2\\mb=na}}\frac{1}{mn}\int_c^x\frac{du}{u}=B\int_1^x u\frac{du}{u}=Bx\qquad(30,\ 31). \tag{29}$$

Hilfssatz 7:

$$\sum_{E_1,E_2=0}^{1}\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}a^{E_1-\frac{1}{2}}b^{E_2-\frac{1}{2}}\sum_{m,n\leqq x^2}\frac{1}{mn}\int_c^x\cos 2\pi u\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{b}\right)\frac{du}{u^{\frac{E_1+E_2}{2}}}=Bx.\ ^{8}) \tag{32}$$

Beweis: Die linke Seite von (32) ist

$$=B\sum_{E_1,E_2=0}^{1}\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}a^{E_1-\frac{1}{2}}b^{E_2-\frac{1}{2}}\sum_{m,n\leqq x^2}\frac{1}{mn}\frac{1}{c^{\frac{E_1+E_2}{2}}}\frac{1}{\frac{m}{a}+\frac{n}{b}}$$

$$=B\sum_{E_1,E_2=0}^{1}\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}a^{E_1-\frac{1}{2}}b^{E_2-\frac{1}{2}}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{mn}\frac{1}{a^{E_1}b^{E_2}}\frac{1}{\sqrt{\frac{m}{a}\frac{n}{b}}}\qquad(16)$$

$$=B\sum_{E_1,E_2=0}^{1}\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}1=Bx.$$

---

[8]) Mit

$$\cos 2\pi u\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{b}\right)\ \text{ist}\quad\cos\left(2\pi u\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{b}\right)\right)$$

gemeint, und ebenso in allen analogen Fällen.

Hilfssatz 8:

$$U_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{\zeta^2\left(\frac{3}{2}\right)}{24\,\zeta(3)}\, x \log x \tag{33}$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \sum_{E_1, E_2 = 0}^{1} \sum_{a,b \leqq \sqrt{x}} a^{E_1 - \frac{1}{2}} b^{E_2 - \frac{1}{2}} \sum_{\substack{m,n \leqq x^2 \\ na < mb}} \frac{1}{mn} \int_c^x \cos 2\pi u \left(\frac{m}{a} - \frac{n}{b}\right) \frac{du}{u^{\frac{E_1+E_2}{2}}} + Bx.$$

Vorbemerkungen: Für reelle v sei

$$\{v\} = \text{Min}\,(v - [v];\quad [v] + 1 - v) \tag{34}$$

(die positiv genommene Entfernung von v zur nächstliegenden ganzen Zahl). Dann gilt bekanntlich für jedes natürliche k, falls $\text{Min}\left(1; \frac{1}{0}\right)$ Eins bedeutet,

$$\sum_{q=k+1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi q v}{q} = B\,\text{Min}\left(1; \frac{1}{k\{v\}}\right) \text{ [9]}, \tag{35}$$

$$\psi(v) = -\frac{1}{\pi} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi q v}{q} \qquad (v \text{ nicht ganz}) \text{ [10]}. \tag{36}$$

Beweis von Hilfssatz 8:

$$k = [x^2]. \tag{37}$$

$$s_k(u) = -\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{k} \frac{\sin 2\pi \frac{m}{a} u}{m}, \quad t_k(u) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{k} \frac{\sin 2\pi \frac{n}{b} u}{n}. \tag{38}$$

$$s_k(u) = B, \qquad t_k(u) = B \qquad \textbf{(38, 35, 36)}. \tag{39}$$

$$\psi\left(\frac{u}{a}\right) - s_k(u) = B\,\text{Min}\left(1; \frac{1}{x^2\left\{\frac{u}{a}\right\}}\right) \qquad \textbf{(35—38)}, \tag{40}$$

$$\psi\left(\frac{u}{b}\right) - t_k(u) = B\,\text{Min}\left(1; \frac{1}{x^2\left\{\frac{u}{b}\right\}}\right) \qquad \textbf{(35—38)}. \tag{41}$$

$$\int_c^x \psi\left(\frac{u}{a}\right) \psi\left(\frac{u}{b}\right) u^{-\frac{E_1+E_2}{2}}\, du - \int_c^x s_k(u)\, t_k(u)\, u^{-\frac{E_1+E_2}{2}}\, du$$

$$= \int_c^x \left(\psi\left(\frac{u}{a}\right) - s_k(u)\right) t_k(u) u^{-\frac{E_1+E_2}{2}}\, du + \int_c^x \left(\psi\left(\frac{u}{b}\right) - t_k(u)\right) s_k(u)\, u^{-\frac{E_1+E_2}{2}}\, du$$

$$+ \int_c^x \left(\psi\left(\frac{u}{a}\right) - s_k(u)\right)\left(\psi\left(\frac{u}{b}\right) - t_k(u)\right) u^{-\frac{E_1+E_2}{2}}\, du$$

$$= Bc^{-\frac{E_1+E_2}{2}} \left(\int_c^x \text{Min}\left(1; \frac{1}{x^2\left\{\frac{u}{a}\right\}}\right) du + \int_c^x \text{Min}\left(1; \frac{1}{x^2\left\{\frac{u}{b}\right\}}\right) du \right) \qquad \textbf{(39, 40, 41)}. \tag{42}$$

$$\int_c^x \text{Min}\left(1; \frac{1}{x^2\left\{\frac{u}{a}\right\}}\right) du = a \int_{\frac{c}{a}}^{\frac{x}{a}} \text{Min}\left(1; \frac{1}{x^2\{v\}}\right) dv$$

---

[9]) Vgl. etwa E. Landau „Vorlesungen über Zahlentheorie“ (Leipzig 1927, 3 Bände), Bd. II, S. 58, Satz 412.
[10]) Vgl. l. c. [9]), S. 59, Formel (493).

$$= Ba\left(\int\limits_{\substack{1\\ \{v\}\leqq\frac{1}{x}}}^{\frac{x}{a}} dv + \frac{1}{x^2}\frac{1}{\frac{1}{x}}\int\limits_{\substack{1\\ \{v\}>\frac{1}{x}}}^{\frac{x}{a}} dv\right) = Ba\left(\frac{x}{a}\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\frac{x}{a}\right) \quad \textbf{(16, 34)}$$

$$= Ba\frac{1}{a} = B. \tag{43}$$

$$\int\limits_c^x \operatorname{Min}\left(1; \frac{1}{x^2\left\{\frac{u}{b}\right\}}\right) du = B \qquad \textbf{(43)}. \tag{44}$$

$$\sum_{E_1, E_2=0}^{1} \sum_{a, b\leqq\sqrt{x}} a^{E_1-\frac{1}{2}} b^{E_2-\frac{1}{2}} \int\limits_c^x \psi\left(\frac{u}{a}\right)\psi\left(\frac{u}{b}\right) u^{-\frac{E_1+E_2}{2}} du$$

$$- \sum_{E_1, E_2=0}^{1} \sum_{a, b\leqq\sqrt{x}} a^{E_1-\frac{1}{2}} b^{E_2-\frac{1}{2}} \int\limits_c^x s_k(u)\, t_k(u)\, u^{-\frac{E_1+E_2}{2}} du$$

$$= B \sum_{E_1, E_2=0}^{1} \sum_{a, b\leqq\sqrt{x}} a^{E_1-\frac{1}{2}} b^{E_2-\frac{1}{2}} c^{-\frac{E_1+E_2}{2}} \qquad \textbf{(42, 43, 44)}$$

$$= B \sum_{E_1, E_2=0}^{1} \sum_{a, b\leqq\sqrt{x}} a^{E_1-\frac{1}{2}} b^{E_2-\frac{1}{2}} a^{-E_1} b^{-E_2} \qquad \textbf{(16)}$$

$$= B \sum_{E_1, E_2=0}^{1} \sum_{a, b\leqq\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{ab}} = Bx. \tag{45}$$

$$\int\limits_c^x s_k(u)\, t_k(u) u^{-\frac{E_1+E_2}{2}} du = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m, n\leqq x^2} \frac{1}{mn} \int\limits_c^x \sin 2\pi\frac{m}{a} u \sin 2\pi\frac{n}{b} u \frac{du}{u^{\frac{E_1+E_2}{2}}} \qquad \textbf{(37, 38)}$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{m, n\leqq x^2\\ mb=na}} \frac{1}{mn} \int\limits_c^x \frac{du}{u^{\frac{E_1+E_2}{2}}} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{m, n\leqq x^2\\ mb\neq na}} \frac{1}{mn} \int\limits_c^x \cos 2\pi u\left(\frac{m}{a} - \frac{n}{b}\right) \frac{du}{u^{\frac{E_1+E_2}{2}}} \tag{46}$$

$$- \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m, n\leqq x^2} \frac{1}{mn} \int\limits_c^x \cos 2\pi u\left(\frac{m}{a} + \frac{n}{b}\right) \frac{du}{u^{\frac{E_1+E_2}{2}}}.$$

$$U_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{\zeta^2\left(\frac{3}{2}\right)}{24\,\zeta(3)} x \log x + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{E_1, E_2=0}^{1} \sum_{a, b\leqq\sqrt{x}} a^{E_1-\frac{1}{2}} b^{E_2-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{m, n\leqq x^2\\ mb\neq na}} \frac{1}{mn} \int\limits_c^x \cos 2\pi u\left(\frac{m}{a} - \frac{n}{b}\right) \frac{du}{u^{\frac{E_1+E_2}{2}}} \tag{47}$$

$$+ Bx \qquad \textbf{(17, 45, 46, 24, 27, 28, 29, 32)}.$$

Die in (47) rechts auftretende mehrfache Summe spalte ich in die beiden Teilsummen S_1 und S_2, wobei $na < mb$ in S_1, $na > mb$ in S_2. Dann ist $S_1 = S_2$ (man vertausche in S_2: E_1 mit E_2, a mit b, m mit n). Mit (47) ist daher (33) nachgewiesen.

Hilfssatz 9: *m, n, r, a, b seien natürliche Zahlen. Zu jedem vorgegebenen Tripel m, n, r gibt es höchstens*

$$B\left(\frac{(m, n)}{\sqrt{mn}}\sqrt{x} + 1\right) \tag{48}$$

Paare a, b mit

$$a \leqq \sqrt{x}, \quad b \leqq \sqrt{x}, \quad mb - na = r. \tag{49}$$

Beweis: Ist (49) erfüllbar, so muß $mb \equiv r \pmod{n}$ sein. Es gehört somit b einer festen Restklasse mod $\frac{n}{(m,n)}$ an. a ist durch b eindeutig bestimmt. Es gibt also

$$B\left(\frac{(m,n)}{n}\sqrt{x}+1\right)$$

Lösungen von (49). Wegen $na \equiv -r \pmod{m}$, gehört a einer festen Restklasse mod $\frac{m}{(m,n)}$ an. Da b durch a eindeutig bestimmt ist, hat (49)

$$B\left(\frac{(m,n)}{m}\sqrt{x}+1\right)$$

Lösungen. Wegen

$$\operatorname{Min}\left(\frac{1}{m};\ \frac{1}{n}\right) \leqq \sqrt{\frac{1}{mn}},$$

ist die Behauptung (48) nachgewiesen.

Hilfssatz 10:

$$U_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{\zeta^2\left(\frac{3}{2}\right)}{24\zeta(3)}\, x\log x + \frac{1}{2\pi^3}\sum_{E_1,E_2=0}^{1}\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}} a^{E_1+\frac{1}{2}}\, b^{E_2+\frac{1}{2}} \sum_{\substack{m,n\leqq x^2\\ na<mb}} \frac{1}{mn\,(mb-na)}\left(x^{-\frac{E_1+E_2}{2}}\sin 2\pi x\left(\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right) - c^{-\frac{E_1+E_2}{2}}\sin 2\pi c\left(\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right)\right) + Bx. \tag{50}$$

Beweis:

$$\int_c^x \cos 2\pi u\left(\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right)\frac{du}{u^{\frac{E_1+E_2}{2}}} = \frac{\sin 2\pi u\left(\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right)}{2\pi\left(\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right)u^{\frac{E_1+E_2}{2}}}\Bigg|_c^x + \frac{E_1+E_2}{4\pi\left(\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right)}\int_c^x \sin 2\pi u\left(\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right)\frac{du}{u^{\frac{E_1+E_2}{2}+1}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\left(\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right)}\left(x^{-\frac{E_1+E_2}{2}}\sin 2\pi x\left(\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right) - c^{-\frac{E_1+E_2}{2}}\sin 2\pi c\left(\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right)\right) + \frac{B}{\left(\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right)^2 c^{\frac{E_1+E_2}{2}+1}}. \tag{51}$$

$$\sum_{E_1,E_2=0}^{1}\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}} \frac{a^{E_1-\frac{1}{2}}\, b^{E_2-\frac{1}{2}}}{c^{\frac{E_1+E_2}{2}+1}} \sum_{\substack{m,n\leqq x^2\\ na<mb}} \frac{1}{mn\left(\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right)^2}$$

$$= B\sum_{E_1,E_2=0}^{1}\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}} \frac{a^{E_1+\frac{3}{2}}\, b^{E_2+\frac{3}{2}}}{(ab)^{\frac{E_1+E_2}{2}+1}} \sum_{\substack{m,n\leqq x^2\\ na<mb}} \frac{1}{mn(mb-na)^2} \tag{16}$$

$$= B\sum_{E_1,E_2=0}^{1}\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}} a^{\frac{E_1-E_2+1}{2}}\, b^{\frac{E_2-E_1+1}{2}} \sum_{\substack{m,n\leqq x^2\\ na<mb}} \frac{1}{mn(mb-na)^2}$$

$$= B\sqrt{x}\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}} \sum_{\substack{m,n\leqq x^2\\ na<mb}} \frac{1}{mn(mb-na)^2}$$

$$= B\sqrt{x} \sum_{m,n \leqq x^\delta} \frac{1}{mn} \sum_{r \leqq x^\delta} \frac{1}{r^2} \sum_{\substack{a,b \leqq \sqrt{x} \\ mb-na=r}} 1$$

$$= Bx \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{(m,n)}{(mn)^{\frac{3}{2}}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} + B\sqrt{x} \sum_{m,n \leqq x^\delta} \frac{1}{mn} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \qquad \text{(Hilfssatz 9)}$$

$$= Bx \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{(m,n)}{(mn)^{\frac{3}{2}}} + Bx = Bx \sum_{d=1}^{\infty} d \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{d^3 (mn)^{\frac{3}{2}}} + Bx$$

$$= Bx. \tag{52}$$

(50) folgt aus (33), (51) und (52).

Hilfssatz 11:

$$U_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{\zeta^2\left(\frac{3}{2}\right)}{24\zeta(3)} x \log x \tag{53}$$

$$+ \frac{1}{2\pi^3} \sum_{E_1, E_2 = 0}^{1} \sum_{m,n \leqq x^\delta} \frac{1}{mn} \sum_{r \leqq (m,n) x^{\frac{1}{2}+\delta}} \frac{1}{r} \sum_{\substack{a,b \leqq \sqrt{x} \\ mb-na=r}} a^{E_1+\frac{1}{2}} b^{E_2+\frac{1}{2}} \left(x^{-\frac{E_1+E_2}{2}} \sin \frac{2\pi x r}{ab} - c^{-\frac{E_1+E_2}{2}} \sin \frac{2\pi c r}{ab} \right) + Bx.$$

Beweis:

$$U_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{\zeta^2\left(\frac{3}{2}\right)}{24\zeta(3)} x \log x \tag{54}$$

$$+ \frac{1}{2\pi^3} \sum_{E_1, E_2 = 0}^{1} \sum_{m,n \leqq x^\delta} \frac{1}{mn} \sum_{r \leqq x^\delta} \frac{1}{r} \sum_{\substack{a,b \leqq \sqrt{x} \\ mb-na=r}} a^{E_1+\frac{1}{2}} b^{E_2+\frac{1}{2}} \left(x^{-\frac{E_1+E_2}{2}} \sin \frac{2\pi x r}{ab} - c^{-\frac{E_1+E_2}{2}} \sin \frac{2\pi c r}{ab} \right) + Bx \quad \textbf{(50)}.$$

$$\frac{a^{E_1+\frac{1}{2}} b^{E_2+\frac{1}{2}}}{c^{\frac{E_1+E_2}{2}}} \leqq \frac{a^{E_1+\frac{1}{2}} b^{E_2+\frac{1}{2}}}{(ab)^{\frac{E_1+E_2}{2}}} = a^{\frac{E_1-E_2+1}{2}} b^{\frac{E_2-E_1+1}{2}} \leqq \sqrt{x} \qquad \textbf{(16)}. \tag{55}$$

Behalte ich in (54) nur die $m, n \leqq x^\delta$ bei, so ist der Fehler

$$= B \sum_{E_1, E_2 = 0}^{1} \left(\sum_{\substack{x^\delta < m \leqq x^2 \\ n \leqq x^2}} + \sum_{\substack{x^\delta < n \leqq x^2 \\ m \leqq x^2}} \right) \frac{1}{mn} \sum_{r \leqq x^\delta} \frac{1}{r} \sum_{\substack{a,b \leqq \sqrt{x} \\ mb-na=r}} \frac{a^{E_1+\frac{1}{2}} b^{E_2+\frac{1}{2}}}{c^{\frac{E_1+E_2}{2}}}$$

$$= B\sqrt{x} \left(\sum_{\substack{x^\delta < m \leqq x^2 \\ n \leqq x^2}} + \sum_{\substack{x^\delta < n \leqq x^2 \\ m \leqq x^2}} \right) \frac{1}{mn} \sum_{r \leqq x^\delta} \frac{1}{r} \sum_{\substack{a,b \leqq \sqrt{x} \\ mb-na=r}} 1 \qquad \textbf{(55)}$$

$$= Bx \left(\sum_{m > x^\delta, n \geqq 1} + \sum_{n > x^\delta, m \geqq 1} \right) \frac{(m,n)}{(mn)^{\frac{3}{2}}} \sum_{r \leqq x^\delta} \frac{1}{r} + B\sqrt{x} \sum_{m,n \leqq x^\delta} \frac{1}{mn} \sum_{r \leqq x^\delta} \frac{1}{r}$$

(Hilfssatz 9)

$$= Bx^{1+\frac{\delta}{2}} \sum_{m > x^\delta, n \geqq 1} \frac{(m,n)}{(mn)^{\frac{3}{2}}} + Bx$$

$$= Bx^{1+\frac{\delta}{2}} \sum_{d=1}^{\infty} d \sum_{m > \frac{x^\delta}{d}, n \geqq 1} \frac{1}{d^3 m^{\frac{3}{2}} n^{\frac{3}{2}}} + Bx$$

$$= Bx^{1+\frac{\delta}{2}} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^2} \sum_{m > \frac{x^\delta}{d}} \frac{1}{m^{\frac{3}{2}}} + Bx$$

$$= Bx^{1+\frac{\delta}{2}} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^2} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{\delta}{2}}} + Bx = Bx^{1+\frac{\delta}{2}-\frac{\delta}{2}} + Bx = Bx.$$

Also kommt

$$U_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{\zeta^2\left(\frac{3}{2}\right)}{24\,\zeta(3)}\,x\log x$$
$$+\frac{1}{2\pi^3}\sum_{E_1,E_2=0}^{1}\sum_{m,n\leqq x^\delta}\frac{1}{mn}\sum_{r\leqq x^\delta}\frac{1}{r}\sum_{\substack{a,b\leqq\sqrt{x}\\ mb-na=r}} a^{E_1+\frac{1}{2}}\,b^{E_2+\frac{1}{2}}\left(x^{-\frac{E_1+E_2}{2}}\sin\frac{2\pi xr}{ab}-c^{-\frac{E_1+E_2}{2}}\sin\frac{2\pi cr}{ab}\right)+Bx,$$

und hierin ist wegen

$$r = mb-na \leqq mb \leqq x^{\delta+\frac{1}{2}}$$

die a-b-Summe für $r > (m,n)\,x^{\frac{1}{2}+\delta}$ leer.

Bevor ich weitergehe, schicke ich einige einfache Bemerkungen voraus, die sich auf die in (53) auftretenden m, n, r, a, b und c beziehen. Die hierbei eingeführten Bezeichnungen mögen bis zum Schlusse des Beweises von (14) gelten.

Es sei

(56) $$m = \mu(m,n), \qquad n = \nu(m,n).$$

Ist die a-b-Summe in (53) nicht leer, so muß (m,n) in r aufgehen:

(57) $$r = \varrho(m,n).$$

Die Lösungen von $mb-na=r$, d. h. von

(58) $$\mu b-\nu a = \varrho,$$

sind

(59) $$a = a_h = \alpha+\mu h, \quad b = b_h = \beta+\nu h \qquad (h = 0,1,2,\ldots),$$

wobei $a=\alpha$, $b=\beta$ die Lösung mit kleinstem $\alpha>0$ bedeutet. Es ist also

(60) $$\mu\beta-\nu\alpha = \varrho,$$

(61) $$0<\alpha\leqq\mu, \quad 0<\beta=\frac{\varrho+\nu\alpha}{\mu}\leqq\frac{\varrho}{\mu}+\nu.$$

Von jetzt ab bedeuten a und b die durch (59) gegebenen Funktionen von h; damit hängt auch $c=c_h$ nach (16) von h ab.

Für das Folgende wird es nötig sein, a und b als Funktionen einer stetigen reellen Veränderlichen h zu betrachten. Um aber Mißverständnissen vorzubeugen, will ich dem h seine Bedeutung als ganze Zahl lassen und lieber

(62) $$a_u = \alpha+\mu u, \quad b_u = \beta+\nu u$$

schreiben.

Hilfssatz 12: *Für $\mu\leqq\nu$ ist $a\leqq b$; für $\mu>\nu$ ist $a\leqq b$ dann und nur dann, wenn $h\leqq\frac{\beta-\alpha}{\mu-\nu}$, d. h. nur dann, wenn $h\leqq\varrho+n$ ist.*

Beweis: Für $\mu\leqq\nu$ ist $\varrho\leqq\nu\,(b-a)$ (58), also sogar $b>a$. Für $\mu>\nu$ ist $a\leqq b$ mit $h\leqq\frac{\beta-\alpha}{\mu-\nu}$ gleichbedeutend (59), und hierin ist

$$\frac{\beta-\alpha}{\mu-\nu}\leqq\beta\leqq\varrho+n \qquad (61, 56).$$

Hilfssatz 13:

(63) $$U_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{\zeta^2\left(\frac{3}{2}\right)}{24\,\zeta(3)}\,x\log x+\frac{1}{2\pi^3}\sum_{E_1,E_2=0}^{1}\sum_{m,n\leqq x^\delta}\frac{1}{mn(m,n)}\sum_{\varrho\leqq x^{\frac{1}{2}+\delta}}\frac{1}{\varrho}\sum_{x^{\frac{1}{2}}\leqq h\leqq\mathrm{Min}\left(\frac{\sqrt{x}-\alpha}{\mu};\,\frac{\sqrt{x}-\beta}{\nu}\right)} a^{E_1+\frac{1}{2}}\,b^{E_2+\frac{1}{2}}$$
$$\times\left(x^{-\frac{E_1+E_2}{2}}\sin\frac{2\pi x\varrho(m,n)}{ab}-c^{-\frac{E_1+E_2}{2}}\sin\frac{2\pi c\varrho(m,n)}{ab}\right)+Bx.$$

Beweis:

$$U_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{\zeta^2\left(\frac{3}{2}\right)}{24\,\zeta(3)}\,x\log x$$
$$+\frac{1}{2\pi^3}\sum_{E_1,E_2=0}^{1}\sum_{m,n\leqq x^\delta}\frac{1}{mn(m,n)}\sum_{\varrho\leqq x^{\frac{1}{2}+\delta}}\frac{1}{\varrho}\sum_{0\leqq h\leqq \mathrm{Min}\left(\frac{\sqrt{x}-\alpha}{\mu};\,\frac{\sqrt{x}-\beta}{\nu}\right)} a^{E_1+\frac{1}{2}}\,b^{E_2+\frac{1}{2}}$$
$$\times\left(x^{-\frac{E_1+E_2}{2}}\sin\frac{2\pi x\varrho(m,n)}{ab}-c^{-\frac{E_1+E_2}{2}}\sin\frac{2\pi c\varrho(m,n)}{ab}\right)+Bx \quad (53, 57, 59).$$

Läßt man hier die $h < x^{\frac{4}{9}}$ weg, so ist der Fehler

$$= B\sum_{E_1,E_2=0}^{1}\sum_{m,n\leqq x^\delta}\frac{1}{mn\,(m,n)}\sum_{\varrho\leqq x^{\frac{1}{2}+\delta}}\frac{1}{\varrho}\sum_{0\leqq h<x^{\frac{4}{9}}}\sqrt{x} \qquad (55)$$
$$= B\sum_{m,n,\varrho\leqq x}\frac{1}{mn\varrho}\,x^{\frac{1}{2}+\frac{4}{9}} = Bx.$$

Es verdient noch hervorgehoben zu werden, daß die h in (63) durch

(64) $\mathrm{Min}\left(\frac{\sqrt{x}-\alpha}{\mu};\ \frac{\sqrt{x}-\beta}{\nu}\right)\leqq\frac{\sqrt{x}}{\mu^j\nu^{1-j}}$ (j eine beliebige Zahl des Intervalls $0\leqq j\leqq 1$)

nach oben abgegrenzt sind.

Hilfssatz 14: [11]) *Es sei $p-\frac{1}{2}$ und $q-\frac{1}{2}$ ganz, $p<q$; $f(u)$ im Intervall $p\leqq u\leqq q$ reell und zweimal differenzierbar; $f''(u)$ dort beständig $\geqq\omega$ bzw. beständig $\leqq-\omega$, wo ω eine von u unabhängige positive Zahl bedeutet.*

Dann ist

$$(65)\qquad \sum_{p\leqq h\leqq q}\sin 2\pi f(h) = B\,\frac{|f'(q)-f'(p)|+1}{\sqrt{\omega}}.$$

Hilfssatz 15: *Es sei $p-\frac{1}{2}$ und $q-\frac{1}{2}$ ganz, $0\leqq p<q$; $f(u)$ im Intervall $p\leqq u\leqq q$ reell und zweimal differenzierbar; $f''(u)$ dort beständig $\geqq\omega$ und $=B\omega$, wo ω eine von u unabhängige positive Zahl bedeutet; $F(u)$ dort positiv, $F'(u)$ vorhanden und stetig.*

Dann ist

$$(66)\qquad \sum_{p\leqq h\leqq q}F(h)\sin 2\pi f(h) = B\left(F(p)+\int_p^q|F'(u)|\,du\right)\left(q\sqrt{\omega}+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\right),$$

also, falls noch $F'(u)>0$ vorausgesetzt wird,

$$(67)\qquad \sum_{p\leqq h\leqq q}F(h)\sin 2\pi f(h) = BF(q)\left(q\sqrt{\omega}+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\right).$$

Beweis:

$$\sum_{p\leqq h\leqq q}(F(h))-F(p))\sin 2\pi f(h) = \sum_{p\leqq h\leqq q}\int_p^h F'(u)\,du\sin 2\pi f(h)$$
$$(68)\quad = \int_p^q F'(u)\sum_{u\leqq h\leqq q}\sin 2\pi f(h)\,du = B\int_p^q|F'(u)|\,\frac{|f'(q)-f'(p)|+1}{\sqrt{\omega}}\,du \qquad (65),$$

---

[11]) J. G. van der Corput „Zahlentheoretische Abschätzungen" [Mathematische Annalen **84** (1921), S. 53—79], Satz 2 und „Zahlentheoretische Abschätzungen mit Anwendung auf Gitterpunktprobleme" [Mathematische Zeitschrift **17** (1923), S. 250—259], Fußnote [5]).

$$(69)\qquad \sum_{p\leqq h\leqq q} F(p)\sin 2\pi f(h) = BF(p)\,\frac{|f'(q)-f'(p)|+1}{\sqrt{\omega}} \qquad \textbf{(65)};$$

$$\sum_{p\leqq h\leqq q} F(h)\sin 2\pi f(h) = B\left(F(p)+\int_p^q |F'(u)|\,du\right)\frac{|f'(q)-f'(p)|+1}{\sqrt{\omega}} \qquad \textbf{(68, 69)},$$

und hierin ist nach Voraussetzung

$$\frac{|f'(q)-f'(p)|+1}{\sqrt{\omega}} = B\,\frac{(q-p)\omega+1}{\sqrt{\omega}} = B\left(q\sqrt{\omega}+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\right).$$

Hilfssatz 16:

$$(70)\qquad \mathfrak{S}_1(x) = \sum_{E_1,E_2=0}^{1}\sum_{m,n\leqq x^\delta}\frac{1}{mn(m,n)}\sum_{\varrho\leqq x^{\frac{1}{2}+\delta}}\frac{1}{\varrho}\sum_{x^{\frac{4}{9}}\leqq h\leqq \mathrm{Min}\left(\frac{\sqrt{x}-\alpha}{\mu};\,\frac{\sqrt{x}-\beta}{\nu}\right)} a^{E_1+\frac{1}{2}}\,b^{E_2+\frac{1}{2}}\,x^{-\frac{E_1+E_2}{2}}\sin\frac{2\pi x\varrho(m,n)}{ab}$$

$$(71)\qquad = Bx.$$

Beweis: Es sei

$$(72)\quad x^{\frac{4}{9}}\leqq H\leqq H'\leqq 2H\leqq 2\,\mathrm{Min}\left(\frac{\sqrt{x}-\alpha}{\mu};\,\frac{\sqrt{x}-\beta}{\nu}\right),\ H \text{ und } H' \text{ ganz},$$

$$(73)\qquad p = H-\tfrac{1}{2},\quad q = H'+\tfrac{1}{2}.$$

Aus (62), (73), (72) folgt

$$(74)\quad a_p\leqq a_H\leqq a_q = \alpha+\mu(H'+\tfrac{1}{2})\leqq 3(\alpha+\mu H) = 3a_H = B\sqrt{x},$$

$$(75)\quad b_H\leqq b_q\leqq 3\,(\beta+\nu H) = 3\,b_H = B\sqrt{x},$$

$$(76)\quad a_p = \alpha+\mu(H-\tfrac{1}{2})\geqq \tfrac{1}{2}(\alpha+\mu H)\geqq \tfrac{1}{4}(\alpha+\mu H')\geqq \tfrac{1}{8}(\alpha+\mu(H'+\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{8}\,a_q,$$

$$(77)\quad b_q\geqq b_p\geqq \tfrac{1}{2}(\beta+\nu H)\geqq \tfrac{1}{8}\,b_q,$$

$$(78)\quad \frac{1}{a_q} = \frac{1}{\alpha+\mu q}\leqq \frac{1}{\mu H'}\leqq \frac{1}{\mu x^{\frac{4}{9}}},$$

$$(79)\quad \frac{1}{b_q}\leqq \frac{1}{\nu x^{\frac{4}{9}}},$$

$$(80)\qquad q = B\,a_q^{\frac{1}{2}}\,b_q^{\frac{1}{2}}\,\mu^{-\frac{1}{2}}\,\nu^{-\frac{1}{2}}.$$

Es sei u eine beliebige Zahl des Intervalls $p\leqq u\leqq q$,

$$(81)\qquad f_1(u) = \frac{x\varrho(m,n)}{a_u\,b_u},\quad F_1(u) = a_u^{E_1+\frac{1}{2}}\,b_u^{E_2+\frac{1}{2}},$$

$$(82)\qquad \omega_1 = f_1''(q).$$

Dann gilt

$$(83)\qquad f_1'(u) = -\frac{x\varrho(m,n)}{(a_u\,b_u)^2}\,(\mu b_u+\nu a_u) \qquad \textbf{(81, 62)},$$

$$f_1''(u) = \frac{2x\,\varrho(m,n)}{(a_u\,b_u)^3}\,((\mu b_u+\nu a_u)^2-\mu\nu a_u\,b_u) \qquad \textbf{(83, 62)}$$

$$= \frac{2x\,\varrho(m,n)}{(a_u\,b_u)^3}\,((\mu b_u-\nu a_u)^2+3\,\mu\nu\,a_u\,b_u)$$

$$(84)\qquad = \frac{2x\,\varrho(m,n)}{(a_u\,b_u)^3}\,(\varrho^2+3\mu\nu\,a_u\,b_u) = 2x\,\varrho(m,n)\left(\frac{\varrho^2}{(a_u\,b_u)^3}+\frac{3\mu\nu}{(a_u\,b_u)^2}\right) \qquad \textbf{(62, 60)}.$$

Mit wachsendem u nimmt $f_1''(u)$ ab **(84)**, da a_u und b_u zunehmen **(62)**. Also ist

$$\omega_1 = f_1''(q)\leqq f_1''(u)\leqq f_1''(p) = Bf_1''(q) = B\,\omega_1 \qquad \textbf{(82, 84, 76, 77)}.$$

$F_1'(u)$ ist stetig und positiv **(81, 62)**; $p-\frac{1}{2}$, $q-\frac{1}{2}$ sind ganz, $0\leqq p<q$ **(73, 72)**. Also darf (67) auf die durch (73), (81), (82) gegebenen p, q, f_1, F_1, ω_1 angewandt werden:

$$\sum_{p \leqq h \leqq q} F_1(h) \sin 2\pi f_1(h) = BF_1(q)\left(q\sqrt{\omega_1} + \frac{1}{\sqrt{\omega_1}}\right),$$

$$(85) \qquad \sum_{h=H}^{H'} a^{E_1+\frac{1}{2}} b^{E_2+\frac{1}{2}} \sin \frac{2\pi x \varrho(m,n)}{ab} = Ba_q^{E_1+\frac{1}{2}} b_q^{E_2+\frac{1}{2}}\left(q\sqrt{\omega_1} + \frac{1}{\sqrt{\omega_1}}\right) \qquad (59).$$

$$a_q^{E_1+\frac{1}{2}} b_q^{E_2+\frac{1}{2}} q\sqrt{\omega_1}$$

$$= Ba_q^{E_1+\frac{1}{2}} b_q^{E_2+\frac{1}{2}} a_q^{\frac{1}{2}} b_q^{\frac{1}{2}} \mu^{-\frac{1}{2}} \nu^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \varrho^{\frac{1}{2}} (m,n)^{\frac{1}{2}} a_q^{-\frac{3}{2}} b_q^{-\frac{3}{2}} (\varrho + \mu^{\frac{1}{2}} \nu^{\frac{1}{2}} a_q^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}) \qquad (80, 82, 84)$$

$$= Bx^{\frac{1}{2}} a_q^{E_1-\frac{1}{2}} b_q^{E_2-\frac{1}{2}} \varrho^{\frac{3}{2}} (m,n)^{\frac{1}{2}} \mu^{-\frac{1}{2}} \nu^{-\frac{1}{2}} + Bx^{\frac{1}{2}} a_q^{E_1} b_q^{E_2} \varrho^{\frac{1}{2}} (m,n)^{\frac{1}{2}}$$

$$= Bx^{\frac{1}{2}+\frac{E_1}{2}-\frac{2}{9}+\frac{E_2}{2}-\frac{2}{9}} \varrho^{\frac{3}{2}} (m,n) + Bx^{\frac{1}{2}+\frac{E_1}{2}+\frac{E_2}{2}} \varrho^{\frac{1}{2}} (m,n) \qquad (74, 75, 78, 79)$$

$$(86) \qquad = Bx^{\frac{E_1+E_2}{2}+\frac{1}{18}} \varrho^{\frac{3}{2}} (m,n) + Bx^{\frac{E_1+E_2}{2}+\frac{1}{2}} \varrho^{\frac{1}{2}} (m,n).$$

$$a_q^{E_1+\frac{1}{2}} b_q^{E_2+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\omega_1}} = Ba_q^{E_1+\frac{1}{2}} b_q^{E_2+\frac{1}{2}} a_q^{\frac{3}{2}} b_q^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \varrho^{-\frac{1}{2}} (m,n)^{-\frac{1}{2}} \mu^{-\frac{1}{2}} \nu^{-\frac{1}{2}} a_q^{-\frac{1}{2}} b_q^{-\frac{1}{2}} \qquad (82, 84)$$

$$= Bx^{-\frac{1}{2}} a_q^{E_1+\frac{3}{2}} b_q^{E_2+\frac{3}{2}} \varrho^{-\frac{1}{2}} \mu^{-\frac{1}{2}} \nu^{-\frac{1}{2}}$$

$$= Bx^{-\frac{1}{2}} a_q x^{\frac{E_1}{2}+\frac{1}{4}} x^{\frac{E_2}{2}+\frac{3}{4}} \varrho^{-\frac{1}{2}} \mu^{-\frac{1}{2}} \nu^{-\frac{1}{2}} = Bx^{\frac{E_1+E_2}{2}+\frac{1}{2}} \mu H \varrho^{-\frac{1}{2}} \mu^{-\frac{1}{2}} \nu^{-\frac{1}{2}} \qquad (74, 75, 61)$$

$$(87) \qquad = Bx^{\frac{E_1+E_2}{2}+\frac{1}{2}} \varrho^{-\frac{1}{2}} \mu^{\frac{1}{2}} \nu^{-\frac{1}{2}} H.$$

$$(88) \qquad \sum_{h=H}^{H'} a^{E_1+\frac{1}{2}} b^{E_2+\frac{1}{2}} x^{-\frac{E_1+E_2}{2}} \sin \frac{2\pi x \varrho(m,n)}{ab} = Bx^{\frac{1}{18}} \varrho^{\frac{3}{2}} (m,n)$$

$$+ Bx^{\frac{1}{2}} \varrho^{\frac{1}{2}} (m\ n) + Bx^{\frac{1}{2}} \varrho^{-\frac{1}{2}} \mu^{\frac{1}{2}} \nu^{-\frac{1}{2}} H \qquad (85\ 86, 87).$$

Ein bekannter Kunstgriff ergibt jetzt

$$\sum_{x^{\frac{1}{9}} \leqq h \leqq \mathrm{Min}\left(\frac{\sqrt{x}-\alpha}{\mu};\ \frac{\sqrt{x}-\beta}{\nu}\right)} a^{E_1+\frac{1}{2}} b^{E_2+\frac{1}{2}} x^{-\frac{E_1+E_2}{2}} \sin \frac{2\pi x \varrho(m,n)}{ab}$$

$$= Bx^{\frac{1}{18}+\delta} \varrho^{\frac{3}{2}} (m,n) + Bx^{\frac{1}{2}+\delta} \varrho^{\frac{1}{2}} (m,n) + Bx^{\frac{1}{2}} \varrho^{-\frac{1}{2}} \mu^{\frac{1}{2}} \nu^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \mu^{-\frac{3}{4}} \nu^{-\frac{1}{4}} \qquad (72, 88, 64)$$

$$= Bx^{\frac{1}{18}+\delta} \varrho^{\frac{3}{2}} (m,n) + Bx^{\frac{1}{2}+\delta} \varrho^{\frac{1}{2}} (m,n) + Bx \varrho^{-\frac{1}{2}} \mu^{-\frac{1}{4}} \nu^{-\frac{1}{4}}.$$

Setze ich dies in (70) ein, so folgt

$$\mathfrak{S}_1(x) = Bx^{\frac{1}{18}+\delta} \sum_{m,n \leqq x^\delta} \frac{1}{mn} \sum_{\varrho \leqq x^{\frac{1}{2}+\delta}} \varrho^{\frac{1}{2}} + Bx^{\frac{1}{2}+\delta} \sum_{m,n \leqq x^\delta} \frac{1}{mn} \sum_{\varrho \leqq x^{\frac{1}{2}+\delta}} \varrho^{-\frac{1}{2}}$$

$$+ Bx \sum_{m,n \leqq x^\delta} \frac{1}{mn(m,n)\mu^{\frac{1}{4}} \nu^{\frac{1}{4}}} \sum_{\varrho \leqq x^{\frac{1}{2}+\delta}} \varrho^{-\frac{3}{2}}$$

$$= Bx^{\frac{1}{18}+\delta+\delta+\frac{3}{4}+\frac{3\delta}{2}} + Bx^{\frac{1}{2}+\delta+\delta+\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}} + Bx \sum_{m,n,\varrho=1}^{\infty} \frac{1}{(mn\varrho)^{\frac{5}{4}}} \qquad (56)$$

$$(71) \qquad = Bx.$$

Hilfssatz 17:

$$(89) \quad \mathfrak{S}_2(x) = \sum_{E_1, E_2=0}^{1} \sum_{m \leqq n \leqq x^\delta} \sum \frac{1}{mn(m,n)} \sum_{\varrho \leqq x^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\varrho} \sum_{x^{\frac{1}{9}} \leqq h \leqq \mathrm{Min}\left(\frac{\sqrt{x}-\alpha}{\mu};\ \frac{\sqrt{x}-\beta}{\nu}\right)} a^{E_1+\frac{1}{2}} b^{-E_1+\frac{1}{2}} \sin \frac{2\pi b \varrho(m,n)}{a}$$

$$(90) \qquad = Bx.$$

Beweis:

$$\frac{b}{a}-\frac{\nu}{\mu}=\frac{\varrho}{\mu a}=B\frac{\varrho}{\mu^2 h},\quad \frac{a}{b}-\frac{\mu}{\nu}=-\frac{\varrho}{\nu b}=B\frac{\varrho}{\nu^2 h} \tag{91}$$ **(58, 59).**

$$\sqrt{ab}-\sqrt{\mu\nu}\,h=\frac{ab-\mu\nu h^2}{\sqrt{ab}+\sqrt{\mu\nu}h}=B\frac{\alpha\beta+(\mu\beta+\nu\alpha)h}{\sqrt{\mu\nu}h} \tag{59}$$

$$=B\frac{(\varrho+\mu\nu)h}{\sqrt{\mu\nu}h}=B\frac{\varrho}{\sqrt{\mu\nu}}+B\sqrt{\mu\nu} \tag{92}$$ **(61).**

$$\sin\frac{2\pi b\varrho(m,n)}{a}-\sin\frac{2\pi\varrho n}{\mu}=B\frac{\varrho^2(m,n)}{\mu^2 h} \tag{93}$$ **(91, 56).**

Es sei $m\leqq n$, d. h. $\mu\leqq\nu$.

$$a^{E_1+\frac{1}{2}}b^{-E_1+\frac{1}{2}}\sin\frac{2\pi b\varrho(m,n)}{a}-\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{E_1}\sqrt{\mu\nu}h\sin\frac{2\pi\varrho n}{\mu}$$

$$=\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{E_1}\sqrt{\mu\nu}h\left(\sin\frac{2\pi b\varrho(m,n)}{a}-\sin\frac{2\pi\varrho n}{\mu}\right)+\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{E_1}(\sqrt{ab}-\sqrt{\mu\nu}h)\sin\frac{2\pi b\varrho(m,n)}{a}$$

$$+\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{E_1}-\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{E_1}\right)\sqrt{ab}\sin\frac{2\pi b\varrho(m,n)}{a}$$

$$=B\sqrt{\mu\nu}h\frac{\varrho^2(m,n)}{\mu^2 h}+B\frac{\varrho}{\sqrt{\mu\nu}}+B\sqrt{\mu\nu}+B\frac{\varrho}{\nu^2 h}\sqrt{x} \tag{94}$$ **(93, 92, 91).**

Setze ich die vier Glieder von (94) in die h-Summe von (89) ein, so ist die derart abgeänderte Summe

$$=B\frac{\sqrt{\mu\nu}\,\varrho^2(m,n)}{\mu^2}\frac{\sqrt{x}}{\nu}+B\frac{\varrho}{\sqrt{\mu\nu}}x^{\frac{1}{2}}+B\sqrt{\mu\nu}\sqrt{\frac{x}{\mu\nu}}+B\frac{\varrho}{\nu^2}x^{\frac{1}{2}+\delta} \tag{64}$$

$$=B\frac{\varrho^2(m,n)^3}{m^{\frac{3}{2}}n^{\frac{1}{2}}}\sqrt{x}+B\varrho x^{\frac{1}{2}+\delta} \tag{56},$$

und summiere ich jetzt über die zu $\mathfrak{S}_2(x)$ gehörigen E_1, E_2, m, n, ϱ, so erhalte ich

$$B\sqrt{x}\sum_{m\leqq n\leqq x^\delta}\sum\frac{(m,n)^2}{m^{\frac{5}{2}}n^{\frac{3}{2}}}\sum_{\varrho\leqq x^{\frac{1}{4}}}\varrho+Bx^{\frac{1}{2}+\delta}\sum_{m\leqq n\leqq x^\delta}\sum\frac{1}{mn}\sum_{\varrho\leqq x^{\frac{1}{4}}}1$$

$$=Bx\sum_{m,n\leqq x}\frac{(m,n)^2}{m^{\frac{5}{2}}n^{\frac{3}{2}}}+Bx^{\frac{3}{4}+2\delta}=Bx\sum_{d\leqq x}d^2\sum_{m,n\leqq\frac{x}{d}}\frac{1}{d^4m^{\frac{5}{2}}n^{\frac{3}{2}}}+Bx$$

$$=Bx\,.$$

Also ist

$$\mathfrak{S}_2(x)=\sum_{E_1,E_2=0}^{1}\sum_{m\leqq n\leqq x^\delta}\sum\frac{1}{mn(m,n)}\sum_{\varrho\leqq x^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\varrho}\sum_{x^{\frac{1}{6}}\leqq h\leqq\mathrm{Min}\left(\frac{\sqrt{x}-\alpha}{\mu};\,\frac{\sqrt{x}-\beta}{\nu}\right)}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{E_1}\sqrt{\mu\nu}h\sin\frac{2\pi\varrho n}{\mu}$$

$$+Bx$$

$$=\sum_{E_1,E_2=0}^{1}\sum_{m\leqq n\leqq x^\delta}\sum\frac{1}{mn(m,n)}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{E_1}\sqrt{\mu\nu}\sum_{\varrho\leqq x^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\varrho}\sin\frac{2\pi\varrho n}{\mu}\sum_{x^{\frac{1}{6}}\leqq h\leqq\mathrm{Min}\left(\frac{\sqrt{x}-\alpha}{\mu};\,\frac{\sqrt{x}-\beta}{\nu}\right)}h \tag{95}$$

$$+Bx.$$

$$\frac{\sqrt{x}-\alpha}{\mu}-\frac{\sqrt{x}-\beta}{\nu}=\frac{(\nu-\mu)\sqrt{x}+\varrho}{\mu\nu}>0,\quad \mathrm{Min}\left(\frac{\sqrt{x}-\alpha}{\mu};\frac{\sqrt{x}-\beta}{\nu}\right)=\frac{\sqrt{x}-\beta}{\nu} \tag{96}$$ **(60),**

$$\sum_{x^{\frac{1}{6}}\leqq h\leqq\mathrm{Min}\left(\frac{\sqrt{x}-\alpha}{\mu};\,\frac{\sqrt{x}-\beta}{\nu}\right)}h=\sum_{x^{\frac{1}{6}}\leqq h\leqq\frac{\sqrt{x}-\beta}{\nu}}h=\sum_{x^{\frac{1}{6}}\leqq h\leqq\frac{\sqrt{x}}{\nu}}h+B\varrho\frac{\sqrt{x}}{\nu}$$ **(96, 61).**

Dies $B\varrho\dfrac{\sqrt{x}}{\nu}$ liefert für $\mathfrak{S}_2(x)$ nach (95) einen Fehler

$$= B\sqrt{x}\sum_{m\leqq n\leqq x^\delta}\sum\frac{1}{mn}\frac{\sqrt{\mu\nu}}{\nu}\sum_{\varrho\leqq x^{\frac14}}1 = Bx^{\frac34}\sum_{m,n\leqq x}\frac{1}{mn} = Bx.$$

Also ist schließlich

$$\mathfrak{S}_2(x) = \sum_{E_1}^{1}\sum_{E_2=0}\sum_{m\leqq n\leqq x^\delta}\sum\frac{1}{mn(m,n)}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{E_1}\sqrt{\mu\nu}\sum_{\varrho\leqq x^{\frac14}}\frac{1}{\varrho}\sin\frac{2\pi\varrho n}{\mu}\sum_{x^\delta\leqq h\leqq\frac{\sqrt{x}}{\nu}}h + Bx$$

$$= B\sum_{m\leqq n\leqq x^\delta}\sum\frac{1}{mn(m,n)}\sqrt{\mu\nu}\,\frac{x}{\nu^2} + Bx$$

(man beachte, daß die letzte h-Summe von ϱ unabhängig ist und wende (35), (36) an)

$$= Bx\sum_{m\leqq n\leqq x}\sum\frac{1}{mn(m,n)\sqrt{\mu\nu}} + Bx = Bx\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{(mn)^{\frac32}} + Bx \qquad (56)$$

(90) $$= Bx.$$

Hilfssatz 18:

(97) $$\mathfrak{S}_3(x) = \sum_{E_1,E_2=0}^{1}\sum_{n<m\leqq x^\delta}\sum\frac{1}{mn(m,n)}\sum_{\varrho\leqq x^{\frac14}}\frac{1}{\varrho}\sum_{x^\delta\leqq h\leqq \mathrm{Min}\left(\frac{\sqrt{x}-\alpha}{\mu};\,\frac{\sqrt{x}-\beta}{\nu}\right)}a^{-E_2+\frac12}b^{E_2+\frac12}\sin\frac{2\pi a\varrho(m,n)}{b}$$

(98) $$= Bx.$$

Beweis: Es sei $n<m$ d. h. $\nu<\mu$.

(99) $$\sin\frac{2\pi a\varrho(m,n)}{b} - \sin\frac{2\pi\varrho m}{\nu} = B\frac{\varrho^2(m,n)}{\nu^2 h} \qquad (91,\ 56).$$

$$a^{-E_2+\frac12}b^{E_2+\frac12}\sin\frac{2\pi a\varrho(m,n)}{b} - \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{E_2}\sqrt{\mu\nu}\,h\sin\frac{2\pi\varrho m}{\nu}$$

$$= \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{E_2}\sqrt{\mu\nu}\;h\left(\sin\frac{2\pi a\varrho(m,n)}{b} - \sin\frac{2\pi\varrho m}{\nu}\right) + \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{E_2}(\sqrt{ab}-\sqrt{\mu\nu}\,h)\sin\frac{2\pi a\varrho(m,n)}{b}$$

$$+\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{E_2}-\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{E_2}\right)\sqrt{ab}\,\sin\frac{2\pi a\varrho(m,n)}{b}$$

(100) $$= B\sqrt{\mu\nu}\,h\,\frac{\varrho^2(m,n)}{\nu^2 h} + B\frac{\varrho}{\sqrt{\mu\nu}} + B\sqrt{\mu\nu} + B\frac{\varrho}{\mu^2 h}\sqrt{x} \qquad (99,\ 92,\ 91).$$

Setze ich die vier Glieder von (100) in die h-Summe von (97) ein, so ist die derart abgeänderte Summe

$$= B\frac{\sqrt{\mu\nu}\,\varrho^2(m,n)}{\nu^2}\frac{\sqrt{x}}{\mu} + B\frac{\varrho}{\sqrt{\mu\nu}}x^{\frac12} + B\sqrt{\mu\nu}\sqrt{\frac{x}{\mu\nu}} + B\frac{\varrho}{\mu^2}x^{\frac12+\delta} \qquad (64)$$

$$= B\frac{\varrho^2(m,n)^3}{m^{\frac12}n^{\frac32}}\sqrt{x} + B\varrho x^{\frac12+\delta} \qquad (56),$$

und summiere ich den letzten Ausdruck über die zu $\mathfrak{S}_3(x)$ gehörigen E_1, E_2, m, n, ϱ, so erhalte ich

$$B\sqrt{x}\sum_{n<m\leqq x^\delta}\sum\frac{(m,n)^2}{m^{\frac32}n^{\frac52}}\sum_{\varrho\leqq x^{\frac14}}\varrho + Bx^{\frac12+\delta}\sum_{n<m\leqq x^\delta}\sum\frac{1}{mn}\sum_{\varrho\leqq x^{\frac14}}1$$

$$= Bx\sum_{m,n\leqq x}\frac{(m,n)^2}{m^{\frac32}n^{\frac52}} + Bx^{\frac34+2\delta} = Bx\sum_{d\leqq x}d^2\sum_{m,n\leqq\frac{x}{d}}\frac{1}{d^4m^{\frac32}n^{\frac52}} + Bx$$

$$= Bx\,.$$

Also ist

$$\mathfrak{S}_3(x) = \sum_{E_1, E_2=0}^{1} \sum_{n<m\leqq x^\delta} \sum \frac{1}{mn(m,n)} \sum_{\varrho \leqq x^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\varrho} \sum_{x^{\frac{4}{9}} \leqq h \leqq \mathrm{Min}\left(\frac{\sqrt{x}-\alpha}{\mu}; \frac{\sqrt{x}-\beta}{\nu}\right)} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{E_2} \sqrt{\mu\nu}\, h \sin \frac{2\pi\varrho m}{\nu}$$

$$+ Bx$$

$$(101) \quad = \sum_{E_1, E_2=0}^{1} \sum_{n<m\leqq x^\delta} \sum \frac{1}{mn(m,n)} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{E_2} \sqrt{\mu\nu} \sum_{\varrho \leqq x^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\varrho} \sin \frac{2\pi\varrho m}{\nu} \sum_{x^{\frac{4}{9}} \leqq h \leqq \mathrm{Min}\left(\frac{\sqrt{x}-\alpha}{\mu}; \frac{\sqrt{x}-\beta}{\nu}\right)} h$$

$$+ Bx.$$

$$(102) \quad \frac{\sqrt{x}-\beta}{\nu} - \frac{\sqrt{x}-\alpha}{\mu} = \frac{(\mu-\nu)\sqrt{x}-\varrho}{\mu\nu} \geqq \frac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}{\mu\nu} > 0, \quad \mathrm{Min}\left(\frac{\sqrt{x}-\alpha}{\mu}; \frac{\sqrt{x}-\beta}{\nu}\right) = \frac{\sqrt{x}-\alpha}{\mu} \qquad (60).$$

$$\sum_{x^{\frac{4}{9}} \leqq h \leqq \mathrm{Min}\left(\frac{\sqrt{x}-\alpha}{\mu}; \frac{\sqrt{x}-\beta}{\nu}\right)} h = \sum_{x^{\frac{4}{9}} \leqq h \leqq \frac{\sqrt{x}-\alpha}{\mu}} h = \sum_{x^{\frac{4}{9}} \leqq h \leqq \frac{\sqrt{x}}{\mu}} h + B\frac{\sqrt{x}}{\mu} \qquad (102, 61).$$

Dies $B\frac{\sqrt{x}}{\mu}$ liefert für $\mathfrak{S}_3(x)$ nach (101) einen Fehler

$$= B\sqrt{x} \sum_{n<m\leqq x^\delta} \sum \frac{1}{mn} \frac{\sqrt{\mu\nu}}{\mu} \sum_{\varrho \leqq x^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\varrho} = B\sqrt{x} \sum_{m,n,\varrho \leqq x} \frac{1}{mn\varrho} = Bx.$$

Also ist schließlich

$$\mathfrak{S}_3(x) = \sum_{E_1, E_2=0}^{1} \sum_{n<m\leqq x^\delta} \sum \frac{1}{mn(m,n)} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{E_2} \sqrt{\mu\nu} \sum_{\varrho \leqq x^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\varrho} \sin \frac{2\pi\varrho m}{\nu} \sum_{x^{\frac{4}{9}} \leqq h \leqq \frac{\sqrt{x}}{\mu}} h + Bx$$

$$= B \sum_{n<m\leqq x^\delta} \sum \frac{1}{mn(m,n)} \sqrt{\mu\nu}\, \frac{x}{\mu^2} + Bx$$

$$= Bx \sum_{n<m\leqq x} \sum \frac{1}{mn(m,n)\sqrt{\mu\nu}} + Bx = Bx \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(mn)^{\frac{3}{2}}} + Bx \qquad (56)$$

$$(98) \quad = Bx.$$

Hilfssatz 19:

$$(103) \quad \mathfrak{S}_4(x) = \sum_{E_1, E_2=0}^{1} \sum_{m,n\leqq x^\delta} \frac{1}{mn(m,n)} \sum_{\varrho \leqq x^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\varrho} \sum_{x^{\frac{4}{9}} \leqq h \leqq \mathrm{Min}\left(\frac{\sqrt{x}-\alpha}{\mu}; \frac{\sqrt{x}-\beta}{\nu}\right)} a^{E_1+\frac{1}{2}} b^{E_2+\frac{1}{2}} c^{-\frac{E_1+E_2}{2}} \sin \frac{2\pi c\varrho(m,n)}{ab}$$

$$(104) \quad = Bx.$$

Beweis: Die aus $\mathfrak{S}_4(x)$ durch die Einschränkung $m \leqq n$, d. h. $\mu \leqq \nu$, entspringende Teilsumme $\mathfrak{S}_{41}(x)$ ist nach Hilfssatz 12, (103), (16) und (89) gleich $\mathfrak{S}_2(x)$; die Restsumme $\mathfrak{S}_{42}(x) = \mathfrak{S}_4(x) - \mathfrak{S}_{41}(x)$ unterscheidet sich von $\mathfrak{S}_3(x)$, nach Hilfssatz 12, (103), (16) und (97), höchstens in den Gliedern mit $h \leqq \varrho + n$. In (103) ist nach (55) jedes Glied der h-Summe $B\sqrt{x}$; in (97) ist nach (91)

$$\frac{b}{a} = \frac{\nu}{\mu} + B\frac{\varrho}{\mu^2 h} = B + Bx^{\frac{1}{4}-\frac{4}{9}} = B,$$

also jedes Glied der h-Summe $B\sqrt{ab}$, d. h. ebenfalls $B\sqrt{x}$. Ersetzt man somit $\mathfrak{S}_{42}(x)$ durch $\mathfrak{S}_3(x)$, so ist der Fehler

$$= B\sqrt{x} \sum_{m,n\leqq x^\delta} \frac{1}{mn} \sum_{\varrho \leqq x^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\varrho} \sum_{h \leqq \varrho+n} 1 = B\sqrt{x} \sum_{m,n\leqq x^\delta} \frac{1}{mn} (x^{\frac{1}{4}} + nx^\delta) = Bx^{\frac{3}{4}} \sum_{m,n\leqq x} \frac{1}{mn} = Bx.$$

Es ist also

$$\mathfrak{S}_4(x) = \mathfrak{S}_2(x) + \mathfrak{S}_3(x) + Bx\,,$$

und (90), (98) liefern die Behauptung (104).

Hilfssatz 20:

$$(105)\quad \mathfrak{S}_5(x) = \sum_{E_1, E_2 = 0}^{1} \sum_{m,n \leqq x^\delta} \frac{1}{mn(m,n)} \sum_{x^{\frac{1}{4}} < \varrho \leqq x^{\frac{1}{2}} + \delta} \frac{1}{\varrho} \sum_{\substack{x^{\frac{4}{5}} \leqq h \leqq \mathrm{Min}\left(\frac{\sqrt{x}-\alpha}{\mu};\, \frac{\sqrt{x}-\beta}{\nu}\right) \\ a \leqq b}} a^{E_1+\frac{1}{2}} b^{E_2+\frac{1}{2}} c^{-\frac{E_1+E_2}{2}} \sin \frac{2\pi c\varrho(m,n)}{ab}$$

$$(106)\quad = Bx.$$

Beweis: Ich mache wieder die Annahmen (72) und (73), setze jetzt aber überdies voraus, daß

$$(107)\qquad a \leqq b \quad \text{für} \quad H \leqq h \leqq H'$$

ist. Es sei u eine beliebige Zahl des Intervalls $p \leqq u \leqq q$,

$$(108)\qquad f_2(u) = \frac{b_u \varrho(m,n)}{a_u}, \quad F_2(u) = a_u^{E_1+\frac{1}{2}} b_u^{-E_1+\frac{1}{2}},$$

$$(109)\qquad \omega_2 = f_2''(q)\,.$$

Dann gilt

$$f_2'(u) = \frac{(\nu a_u - \mu b_u)\,\varrho(m,n)}{a_u^2} = -\frac{\varrho^2(m,n)}{a_u^2} \qquad (108, 62, 60),$$

$$(110)\qquad f_2''(u) = \frac{2\varrho^2 \mu(m,n)}{a_u^3} \qquad (62).$$

Mit wachsendem u nimmt $f_2''(u)$ ab (110), da a_u wächst (62). Also ist

$$\omega_2 = f_2''(q) \leqq f_2''(u) \leqq f_2''(p) = B f_2''(q) = B\omega_2 \qquad (109, 110, 76).$$

$F_2'(u)$ ist stetig und positiv, denn es gilt

$$F_2'(u) = a_u^{E_1-\frac{1}{2}} b_u^{-E_1-\frac{1}{2}}((E_1 + \tfrac{1}{2})\,\mu b_u + (-E_1 + \tfrac{1}{2})\,\nu a_u)$$

$$= a_u^{E_1-\frac{1}{2}} b_u^{-E_1-\frac{1}{2}}\left(E_1\varrho + \frac{\mu b_u + \nu a_u}{2}\right) \qquad (108, 62, 60);$$

$p - \frac{1}{2}$, $q - \frac{1}{2}$ sind ganz, $0 \leqq p < q$ (73, 72). Also darf (67) auf die durch (73), (108), (109) gegebenen p, q, f_2, F_2, ω_2 angewandt werden:

$$\sum_{h=H}^{H'} a^{E_1+\frac{1}{2}} b^{E_2+\frac{1}{2}} c^{-\frac{E_1+E_2}{2}} \sin \frac{2\pi c\varrho(m,n)}{ab}$$

$$= \sum_{h=H}^{H'} a^{E_1+\frac{1}{2}} b^{-E_1+\frac{1}{2}} \sin \frac{2\pi b\varrho(m,n)}{a} = \sum_{p \leqq h \leqq q} F_2(h) \sin 2\pi f_2(h) \qquad (107, 16)$$

$$(111)\qquad = BF_2(q)\left(q\sqrt{\omega_2} + \frac{1}{\sqrt{\omega_2}}\right).$$

$$F_2(q) = a_q^{\frac{1}{2}} b_q^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a_q}{b_q}\right)^{E_1} = Ba_q^{\frac{1}{2}} b_q^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a_H}{b_H}\right)^{E_1} \qquad (108, 74, 75)$$

$$(112)\qquad = Ba_q^{\frac{1}{2}} b_q^{\frac{1}{2}} = B\sqrt{x} \qquad (107, 74, 75).$$

$$(113)\qquad q = B\sqrt{x} \qquad (73, 72).$$

$$\sqrt{\omega_2} = B\varrho\,\mu^{\frac{1}{2}}(m,n)^{\frac{1}{2}} a_q^{-\frac{3}{2}} = B\varrho\,\mu^{\frac{1}{2}}(m,n)^{\frac{1}{2}}\,\mu^{-\frac{3}{2}} x^{-\frac{3}{4}} \qquad (109, 110, 78)$$

$$(114)\qquad = B\varrho\,(m,n)\,x^{-\frac{3}{4}}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{\omega_2}} = Ba_q^{\frac{3}{2}} \varrho^{-1} \mu^{-\frac{1}{2}}(m,n)^{-\frac{1}{2}} = Bx^{\frac{1}{4}} \mu H \varrho^{-1} \mu^{-\frac{1}{2}}(m,n)^{-\frac{1}{2}} \qquad (109, 110, 74, 61)$$

$$(115) \qquad = Bx^{\frac{1}{4}} \varrho^{-1} \mu^{\frac{1}{2}}(m,n)^{-\frac{1}{2}} H.$$

$$(116) \quad \sum_{h=H}^{H'} a^{E_1+\frac{1}{2}} b^{E_2+\frac{1}{2}} c^{-\frac{E_1+E_2}{2}} \sin\frac{2\pi c\varrho(m,n)}{ab} = Bx^{\frac{1}{3}}\varrho(m,n) + Bx^{\frac{3}{4}}\varrho^{-1}\mu^{\frac{1}{2}}(m,n)^{-\frac{1}{2}} H$$

(111—115).

Ist für ein gegebenes Tripel m, n, ϱ die h-Summe in (105) nicht leer, so läuft h über ein Intervall (Hilfssatz 12). Zerlege ich dieses in Teilintervalle $H \leqq h \leqq H'$ mit (72), (107) und wende (116) an, so folgt

$$\sum_{\substack{x^{\frac{1}{6}} \leqq h \leqq \mathrm{Min}\left(\frac{\sqrt{x}-\alpha}{\mu};\ \frac{\sqrt{x}-\beta}{\nu}\right) \\ a \leqq b}} a^{E_1+\frac{1}{2}} b^{E_2+\frac{1}{2}} c^{-\frac{E_1+E_2}{2}} \sin\frac{2\pi c\varrho(m,n)}{ab}$$

$$= Bx^{\frac{1}{3}+\delta}\varrho(m,n) + Bx^{\frac{3}{4}}\varrho^{-1}\mu^{\frac{1}{2}}(m,n)^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}\mu^{-\frac{3}{4}}\nu^{-\frac{1}{4}} \qquad \textbf{(64)}$$

$$(117) \qquad = Bx^{\frac{1}{3}+\delta}\varrho(m,n) + Bx^{\frac{5}{4}}\varrho^{-1} m^{-\frac{1}{4}} n^{-\frac{1}{4}} \qquad \textbf{(56)},$$

$$\mathfrak{S}_5(x) = Bx^{\frac{1}{3}+\delta} \sum_{m,n \leqq x^{\delta}} \frac{1}{mn} \sum_{\varrho \leqq x^{\frac{1}{2}+\delta}} 1 + Bx^{\frac{5}{4}} \sum_{m,n \leqq x^{\delta}} \frac{1}{(mn)^{\frac{5}{4}}} \sum_{\varrho > x^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\varrho^2} = Bx^{\frac{5}{6}+3\delta} + Bx^{\frac{5}{4}-\frac{1}{4}} \qquad \textbf{(105, 117)}$$

$$(106) \qquad = Bx.$$

Hilfssatz 21:

$$(118) \quad \mathfrak{S}_6(x) = \sum_{E_1,E_2=0}^{1} \sum_{m,n \leqq x^{\delta}} \frac{1}{mn\,(m,n)} \sum_{x^{\frac{1}{4}} < \varrho \leqq x^{\frac{1}{2}+\delta}} \frac{1}{\varrho} \sum_{\substack{x^{\frac{1}{6}} \leqq h \leqq \mathrm{Min}\left(\frac{\sqrt{x}-\alpha}{\mu};\ \frac{\sqrt{x}-\beta}{\nu}\right) \\ b < a}} a^{E_1+\frac{1}{2}} b^{E_2+\frac{1}{2}} c^{-\frac{E_1+E_2}{2}} \sin\frac{2\pi c\varrho(m,n)}{ab}$$

$$(119) \qquad = Bx.$$

Beweis: Ich mache wieder die Annahmen (72) und (73), setze aber überdies voraus, daß

$$(120) \qquad b < a \quad \text{für} \quad H \leqq h \leqq H'$$

ist. Es sei u eine beliebige Zahl des Intervalls $p \leqq u \leqq q$,

$$(121) \qquad f_3(u) = -\frac{a_u \varrho(m,n)}{b_u}, \quad F_3(u) = a_u^{-E_2+\frac{1}{2}} b_u^{E_2+\frac{1}{2}},$$

$$(122) \qquad \omega_3 = f_3''(q).$$

Dann gilt

$$f_3'(u) = \frac{(\nu a_u - \mu b_u)\varrho(m,n)}{b_u^2} = -\frac{\varrho^2(m,n)}{b_u^2} \qquad \textbf{(121, 62, 60)},$$

$$(123) \qquad f_3''(u) = \frac{2\varrho^2 \nu(m,n)}{b_u^3} \qquad \textbf{(62)}.$$

Mit wachsendem u nimmt $f_3''(u)$ ab **(123)**, da b_u wächst **(62)**. Also ist

$$\omega_3 = f_3''(q) \leqq f_3''(u) \leqq f_3''(p) = Bf_3''(q) = B\omega_3 \qquad \textbf{(122, 123, 77)}.$$

$F_3'(u)$ ist jedenfalls stetig **(121)**; $p - \frac{1}{2}$, $q - \frac{1}{2}$ sind ganz, $0 \leqq p < q$ **(73, 72)**. Also darf (66) auf die durch (73), (121), (122) gegebenen p, q, f_3, ω_3 angewandt werden:

$$\sum_{h=H}^{H'} a^{E_1+\frac{1}{2}} b^{E_2+\frac{1}{2}} c^{-\frac{E_1+E_2}{2}} \sin\frac{2\pi c\varrho(m,n)}{ab}$$

$$= \sum_{h=H}^{H'} a^{-E_2+\frac{1}{2}} b^{E_2+\frac{1}{2}} \sin\frac{2\pi a\varrho(m,n)}{b} = -\sum_{p \leqq h \leqq q} F_3(h) \sin 2\pi f_3(h) \qquad \textbf{(120, 16)}$$

$$= B\left(F_3(p) + \int_p^q |F_3'(u)|\,du\right)\left(q\sqrt{\omega_3} + \frac{1}{\sqrt{\omega_3}}\right). \tag{124}$$

$$F_3'(u) = a_u^{-E_2-\frac{1}{2}} b_u^{E_2-\frac{1}{2}} ((-E_2+\tfrac{1}{2})\,\mu b_u + (E_2+\tfrac{1}{2})\,v a_u) \qquad (121, 62)$$

$$= a_u^{-E_2-\frac{1}{2}} b_u^{E_2-\frac{1}{2}} ((-E_2+\tfrac{1}{2})(\varrho + v a_u) + (E_2+\tfrac{1}{2})\,v a_u) \qquad (62, 60)$$

$$= a_u^{-E_2-\frac{1}{2}} b_u^{E_2-\frac{1}{2}} ((-E_2+\tfrac{1}{2})\,\varrho + v a_u).$$

Für $E_2 = 0$ ist also $F_3'(u) > 0$; für $E_2 = 1$ ist $\left(-E_2+\frac{1}{2}\right)\varrho + v a_u = -\frac{\varrho}{2} + v a_u \leqq 0$ mit $u \leqq \frac{\varrho - 2v\alpha}{2\mu v}$ gleichbedeutend (62). $F_3(u)$ ist daher entweder monoton zunehmend oder monoton abnehmend oder zunächst abnehmend, dann zunehmend. In allen diesen Fällen gilt

$$\int_p^q |F_3'(u)|\,du \leqq F_3(q) + F_3(p),$$

$$F_3(p) + \int_p^q |F_3'(u)|\,du \leqq 2(F_3(q) + F_3(p))$$

$$= 2\left(a_q^{\frac{1}{2}} b_q^{\frac{1}{2}} \left(\frac{b_q}{a_q}\right)^{E_2} + a_p^{\frac{1}{2}} b_p^{\frac{1}{2}} \left(\frac{b_p}{a_p}\right)^{E_2}\right) \qquad (121)$$

$$= B a_q^{\frac{1}{2}} b_q^{\frac{1}{2}} \left(\frac{b_q}{a_q}\right)^{E_2} = B\sqrt{x}\left(\frac{b_H}{a_H}\right)^{E_2} = B\sqrt{x} \qquad (125) \quad (74\text{—}77, 120).$$

$$\sqrt{\omega_3} = B\varrho v^{\frac{1}{2}} (m,n)^{\frac{1}{2}} b_q^{-\frac{3}{2}} = B\varrho v^{\frac{1}{2}} (m,n)^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{3}{2}} x^{-\frac{2}{3}} \qquad (122, 123, 79)$$

$$= B\varrho (m,n) x^{-\frac{2}{3}}. \qquad (126)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\omega_3}} = B b_q^{\frac{3}{2}} \varrho^{-1} v^{-\frac{1}{2}} (m,n)^{-\frac{1}{2}} = B x^{\frac{1}{4}} (\beta + vH)\,\varrho^{-1} v^{-\frac{1}{2}} (m,n)^{-\frac{1}{2}} \qquad (122, 123, 75)$$

$$= B x^{\frac{1}{4}} (\varrho + vH)\,\varrho^{-1} v^{-\frac{1}{2}} (m,n)^{-\frac{1}{2}} \qquad (61)$$

$$= B x^{\frac{1}{4}} + B x^{\frac{1}{4}} \varrho^{-1} v^{\frac{1}{2}} (m,n)^{-\frac{1}{2}} H. \qquad (127)$$

$$\sum_{h=H}^{H'} a^{E_1+\frac{1}{2}} b^{E_2+\frac{1}{2}} c^{-\frac{E_1+E_2}{2}} \sin\frac{2\pi c\varrho(m,n)}{ab} = B x^{\frac{1}{3}} \varrho(m,n) + B x^{\frac{3}{4}} \tag{128}$$

$$+ B x^{\frac{3}{4}} \varrho^{-1} v^{\frac{1}{2}} (m,n)^{-\frac{1}{2}} H \qquad (124, 125, 113, 126, 127).$$

Ist für ein gegebenes Tripel m, n, ϱ die h-Summe in (118) nicht leer, so läuft h über ein Intervall (Hilfssatz 12). Zerlege ich dieses in Teilintervalle $H \leqq h \leqq H'$ mit (79), (120) und wende (128) an, so folgt

$$\sum_{\substack{x^{\frac{1}{3}} \leqq h \leqq \mathrm{Min}\left(\frac{\sqrt{x}-\alpha}{\mu};\ \frac{\sqrt{x}-\beta}{\nu}\right) \\ b<a}} a^{E_1+\frac{1}{2}} b^{E_2+\frac{1}{2}} c^{-\frac{E_1+E_2}{2}} \sin\frac{2\pi c\varrho(m,n)}{ab}$$

$$= B x^{\frac{1}{3}+\delta} \varrho(m,n) + B x^{\frac{3}{4}+\delta} + B x^{\frac{3}{4}} \varrho^{-1} v^{\frac{1}{2}} (m,n)^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \mu^{-\frac{1}{4}} v^{-\frac{3}{4}} \qquad (64)$$

$$= B x^{\frac{1}{3}+\delta} \varrho(m,n) + B x^{\frac{3}{4}+\delta} + B x^{\frac{5}{4}} \varrho^{-1} m^{-\frac{1}{4}} n^{-\frac{1}{4}} \qquad (129) \quad (56),$$

$$\mathfrak{S}_6(x) = B x^{\frac{1}{3}+\delta} \sum_{m,n \leqq x^{\delta}} \frac{1}{mn} \sum_{\varrho \leqq x^{\frac{1}{3}+\delta}} 1 + B x^{\frac{3}{4}+\delta} \sum_{m,n \leqq x^{\delta}} \frac{1}{mn} \sum_{\varrho \leqq x^{\frac{1}{3}+\delta}} \frac{1}{\varrho}$$

$$+ B x^{\frac{5}{4}} \sum_{m,n \leqq x^{\delta}} \frac{1}{(mn)^{\frac{5}{4}}} \sum_{\varrho > x^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\varrho^2} = B x^{\frac{5}{6}+3\delta} + B x^{\frac{3}{4}+2\delta} + B x^{\frac{5}{4}-\frac{1}{4}} \qquad (118, 129)$$

$$= B x. \qquad (119)$$

Beweis von (14): (63), (70), (71), (103), (104), (105), (106), (118), (119).

Hilfssatz 22:

$$(130)\quad -T_{-\frac{1}{2}}(u)=\frac{1}{2}\zeta\left(\frac{1}{2}\right)+\sum_{a\leqq\sqrt{u}}\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{u}{a}\right)+\frac{1}{\sqrt{u}}\sum_{b\leqq\sqrt{u}}\sqrt{b}\,\psi\left(\frac{u}{b}\right)+Bu^{-\frac{1}{4}},$$

$$(131)\qquad T_{\frac{1}{2}}(u)=\sqrt{u}\,T_{-\frac{1}{2}}(u)+\frac{1}{2}\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{u}+Bu^{\frac{1}{4}}.$$

(130) ist der Spezialfall $\theta=-\frac{1}{2}$ von C, (65); (131) ist C, (122).

Beweis von (15):

$$(132)\quad U_{\frac{1}{2}}(x)=\int_1^x T_{\frac{1}{2}}^2(u)du=\int_1^x uT_{-\frac{1}{2}}^2(u)\,du+\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\int_1^x uT_{-\frac{1}{2}}(u)\,du$$

$$+B\int_1^x u^{\frac{3}{4}}\,|T_{-\frac{1}{2}}(u)|\,du+Bx^2 \qquad \textbf{(131)}.$$

$$\int_1^x uT_{-\frac{1}{2}}^2(u)du=\int_1^x dv\int_v^x T_{-\frac{1}{2}}^2(u)du+\int_1^x T_{-\frac{1}{2}}^2(u)du$$

$$=\frac{\zeta^2\left(\frac{3}{2}\right)}{24\zeta(3)}\int_1^x(x\log x-v\log v)\,dv+Bx^2 \qquad \textbf{(14)}$$

$$(133)\qquad =\frac{\zeta^2\left(\frac{3}{2}\right)}{48\zeta(3)}x^2\log x+Bx^2.$$

$$\textbf{(130)}\quad -\int_1^x uT_{-\frac{1}{2}}(u)du=\int_1^x u\sum_{a\leqq\sqrt{u}}\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{u}{a}\right)du+\int_1^x\sqrt{u}\sum_{b\leqq\sqrt{u}}\sqrt{b}\;\psi\left(\frac{u}{b}\right)du+Bx^2$$

$$=\sum_{a\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{a^2}^x u\psi\left(\frac{u}{a}\right)du+\sum_{b\leqq\sqrt{x}}\sqrt{b}\int_{b^2}^x\sqrt{u}\,\psi\left(\frac{u}{b}\right)du+Bx^2$$

$$=\sum_{a\leqq\sqrt{x}}a^{\frac{3}{2}}\int_a^{\frac{x}{a}}v\,\psi(v)\,dv+\sum_{b\leqq\sqrt{x}}b^2\int_b^{\frac{x}{b}}\sqrt{v}\,\psi(v)\,dv+Bx^2$$

$$(134)\qquad =B\sum_{a\leqq\sqrt{x}}a^{\frac{3}{2}}\frac{x}{a}+B\sum_{b\leqq\sqrt{x}}b^2\sqrt{\frac{x}{b}}+Bx^2=Bx^2.$$

$$\int_1^x u^{\frac{3}{4}}\,|T_{-\frac{1}{2}}(u)|\,du\leqq\left(\int_1^x u^{\frac{3}{2}}\,du\int_1^x T_{-\frac{1}{2}}^2(u)\,du\right)^{\frac{1}{2}}=Bx^{\frac{7}{4}}\log^{\frac{1}{2}}x \qquad \textbf{(14)}$$

$$(135)\qquad =Bx^2.$$

(15) folgt aus (132) bis (135).

Radość, den 15. März 1932.

Eingegangen 20. April 1932.